4. Übung am 23. November 2007

Institut für Allgemeine Physik
Grundlagen der Physik III

Beispiel 14

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem unendlich tiefen Potentialtopf mit der Breite a und einer Potentialverteilung der Form:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < a \\ \infty & \text{für sonst} \end{cases}$$

Nehmen Sie an, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ am linken Ende der Potentialmulde (Potentialtopf) befinde. Es werde durch ein Wellenpaket der einfachen Form

$$\psi(x, t = 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{a}} & \text{für } 0 < x < a/4 \\ 0 & \text{für sonst} \end{cases}$$

beschrieben. (Abbildung 1)

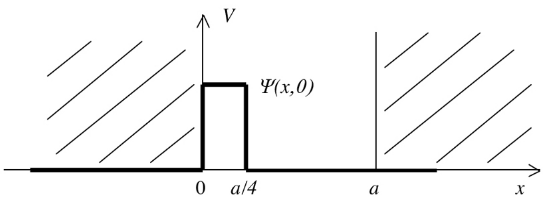

Abbildung 1: Teilchen als vereinfachtes Wellenpaket in einem unendlich tiefen Potentialtopf der Breite a

Für den unendlich tiefen Potentialtopf haben Sie in in der Vorlesung die Energieeigenwerte

$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$ sowie die Eigenfunktionen

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(n\pi \frac{x}{a})$$

kennengelernt.

a)

Schreiben Sie die Wellenfunktion als Überlagerung der möglichen Energieeigenfunktionen und berechnen sie explizit die entsprechenden Koeffizienten c_n.
(*Hinweis: Fourierreihe*)

b)

Wie verhält sich die Wellenfunktion $\psi(x, t = 0)$ in der Zeit?

c)

Man führt nun eine Energiemessung durch. Welche Energien und mit welcher Wahrscheinlichkeit werden sie gemessen werden. Gibt es Energiewerte, die man nie beobachten wird?

[1 Punkt]

Beispiel 15

Ein Teilchenstrahl, wobei die Teilchenmasse m sein soll und deren Energie $E > 0$ ist, fällt auf ein abstoßendes Delta-förmiges Potential (siehe Abbildung) von links ein. Das Potential kann also durch $V(x) = V_0\delta(x)$ beschrieben werden. Es gelte $V_0 > 0$. Sonst sei das Potential überall 0. (*Ein Teilchen mit exakt einer Energie ist zwar nicht physikalisch, liefert aber in dieser Art von Beispielen das gewünschte Ergebnis*) (Abbildung 2)

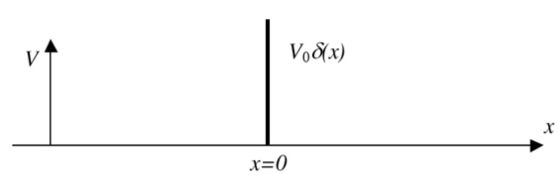

Abbildung 2: Deltaförmiges Streupotential

a)

Geben Sie die Wellenfunktionen in den Gebieten $x < 0$ und $x > 0$ an.

b)

Stimmt es, dass in diesem Fall $R+T=1$, wobei einfach gilt: R....Reflexionskoeffizient ist Anteil der reflektierten Teilchen, sowie T.....Transmissionskoeffizient ist Anteil der transmittierten Teilchen? Wie müsste man das Potential ändern, damit diese Aussage so nicht gilt gilt (Beweisen!).

Verwenden Sie dazu den quantenmechanischen Ausdruck für den Teilchenstrom $J(x,t) = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial x}\psi(x,t))$

c)

Für ein $\delta-$Potential bei x_A muss die Stetigkeitsbedingung am Ort der entsprechenden Grenzfläche

$$\psi_1'(x=x_A) = \psi_2'(x=x_A)$$

insoweit modifiziert werden , weil das $\delta-$Potential bei $x=x_A$ unendlich wird. Zeigen Sie mit der Eigenschaft der $\delta-$Funktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

durch Integration der Schrödingergleichung, dass im vorliegenden Fall die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktionen in der Form

$$\psi'(x=+\epsilon) - \psi'(x=-\epsilon) = \frac{2m}{\hbar^2}V_0\psi(0)$$

geschrieben werden kann, wobei ϵ sehr klein ist und gegen Null geht. Dies benötigen Sie für den nächsten Punkt des Beispiels.

d)

Berechnen Sie den Anteil der Teilchen des einfallenden Strahles, die durch das Deltapotential reflektiert werden, dh. finden Sie R als Funktion von E, m, V_0 und fundamentaler Konstanten.

[1 Punkt]

Beispiel 16

Gegeben sei eine Potentialverteilung in drei Bereichen I, II, III (endlich tiefer Potentialtopf) der Form (Abbildung 3):

$$\mathrm{I}\ \ \mathrm{V(x) = U_o} \quad -\infty < \mathrm{x} < -\mathrm{a}/2 \tag{1}$$
$$\mathrm{II}\ \ \mathrm{V(x)} = 0 \quad -\mathrm{a}/2 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{a}/2 \tag{2}$$
$$\mathrm{III}\ \ \mathrm{V(x) = U_o} \quad \mathrm{a}/2 < \mathrm{x} < +\infty \tag{3}$$

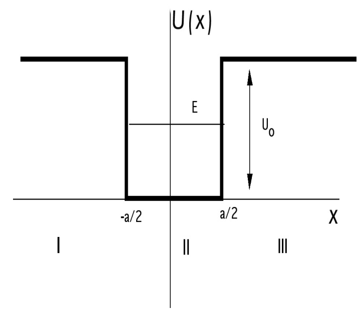

Abbildung 3: Endlicher Potentialtopf und gebundene Zustände

Bestimmen Sie die Energieeigenwerte der symmetrischen Lösungsfunktionen der Schrödinger - Gleichung für dieses Potential unter der Voraussetzung $0 < E < U_o$. Gibt es nur diskrete Energieniveaus?

[Hinweis zum Lösungsvorgang: Aufstellen der Schrödingergleichung für die 3 Bereiche, Aufteilen der möglichen Lösungen in gerade und ungerade Lösungen (Reduktion), Anschlussbedingungen, wann ist das entstehende Gleichungssystem lösbar? Daraus dann die Eigenwerte bestimmen]

[2 Punkte]