

Übungen Grundlagen der Physik III
WS 2007
8. Übung am 11 Januar 2008¹

29.) Elektronenstrahl

Die Interpretation des Absolutquadrats der Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte besagt, daß die Größe $\rho(\vec{r}, t)dV = |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV$ der Wahrscheinlichkeit proportional ist, ein Teilchen bei einer Messung in dem angegebenen Volumenelement anzutreffen. Wenn sich das Teilchen bewegt, wird im Laufe der Zeit die Wahrscheinlichkeit abnehmen, das Teilchen in einem begrenzten Volumen anzutreffen, während sie außerhalb des Volumens in gleichem Maß zunimmt. Mit anderen Worten, einem sich bewegenden Teilchen ist neben seiner Wahrscheinlichkeitsdichte auch eine Wahrscheinlichkeitsflußdichte oder Stromdichte \vec{j} zugeordnet, die mit der Wahrscheinlichkeitsdichte über die Kontinuitätsgleichung verknüpft sein muß.

a) Zeigen Sie, daß für ein bewegtes Teilchen mit der Wellenfunktion $\psi(r, t)$ die zeitliche Änderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Volumen V gegeben ist durch:

$$\frac{i}{\hbar} \int_V \{ \psi H \psi^* - \psi^* H \psi \} dV$$

H ist die Hamiltonfunktion

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V(\vec{r})\psi$$

b) Zeigen Sie, daß der Teilchenstrom \vec{j} durch die Größe

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} [\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi]$$

beschrieben wird und der Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

genügt.

Hinweis: es gilt $\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi = \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)$

c) Wie muß bei einer eindimensionalen ebenen Welle

$$\psi(x, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

die Normierungskonstante A gewählt werden, damit diese Welle einem Teilchenstrom der Dichte 1 entspricht (das heißt, daß durch die Einheitsfläche senkrecht zur Bewegungsrichtung $\vec{p}/|\vec{p}| = \vec{p}/mv$ ein Teilchen pro Zeiteinheit hindurchgeht.)

30.) Exotische Atome

Die quantenmechanische Beschreibung des Wasserstoffatoms ist sehr allgemein und bedeutet keine Einschränkung auf Elektron-Proton-Paare. Die Ergebnisse sollen sich also auch auf andere gebundene Teilchenpaare übertragen lassen.

a.) Untersuchen Sie, was passiert, wenn das Elektron durch ein negatives Pion ersetzt wird, dessen Masse 273 mal so groß ist wie jene des Elektrons. Wie groß ist die sich ergebende Energie des Grundzustandes? Spielt die Korrektur bezüglich der reduzierten Masse in diesem System eine grössere oder eine kleinere Rolle als im Wasserstoffatom?

b.) Gebundene Zustände können auch bei einem Elektron-Positron-Paar erhalten werden (sogenanntes Positronium). Das Positron ist das Antiteilchen des Elektrons und hat genau die entgegengesetzte Ladung, aber die gleiche Masse. Berechnen Sie auch hier die Grundzustandsenergie.

¹Wolfgang Werner

c.) Mesonen und Positronen sind instabil: die atomartigen Gebilde aus a) und b) können daher sehr schnell zerfallen, weshalb man keine makroskopischen Mengen dieser Substanzen herstellen kann. Wie kann man nachweisen, daß sich überhaupt derartige gebundene Zustände bilden?

31.) Moseleysches Gesetz

Es wurden die folgenden K_α -Linien (Übergang eines Elektrons von der L -Schale in die K -Schale) für verschiedene Elemente gemessen:

	Z	$\lambda(\text{pm})$		Z	$\lambda(\text{pm})$
Mg	12	987.0	S	16	536.0
Ca	20	335.0	Cr	24	229.0
Co	27	179.0	Cu	29	154.0
Rb	37	93.0	W	74	21.0

a.) Tragen Sie $\sqrt{1/\lambda_{K_\alpha}}$ gegen die Ordnungszahl Z der Elemente auf. Überprüfen Sie die empirisch von H.G. Moseley gefundene Gesetzmäßigkeit

$$\sqrt{1/\lambda_{K_\alpha}} = A(Z - S)$$

und bestimmen Sie Näherungswerte für A und S (graphisch oder durch lineare Regression).

b.) Die K_α -Strahlung eines unbekanntes Elementes hat die Wellenlänge 275.0 pm. Um welches Element handelt es sich?

32.) Linienbreite des Wasserstoffatoms

An einem im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen erhitzten Wasserstoffgas wird bei der L_α -Linie (Übergang vom $2p \rightarrow 1s$ -Zustand) eine Dopplerbreite von 5.0 pm gemessen.

a.) Welche Temperatur hat das Gas?

b.) Welche Probleme würden sich bei der spektroskopischen Bestimmung der Dopplerbreite unter Berücksichtigung der Feinstruktur dieser Linie (121.56737 nm und 121.56683 nm) ergeben?

c.) Wie groß ist das Verhältnis der Besetzungsdichte des angeregten zu jener des Grundzustandes?

Punkteschlüssel: Bsp. 29:1; Bsp. 30:1; Bsp. 31:1; Bsp. 32:1.