Übungen Grundlagen der Physik III
WS 2009/10
5. Übung am 19. November 2009[1]

21.) Doppelspaltexperiment mit Photonen

In einem Doppelspaltexperiment mit Photonen sei die Wellenfunktion für ein Photon dass sich von der Quelle zu Spalt 1 bewegt durch $|a_1\rangle$ gegeben. Die Wahrscheinlichkeit dass es dort in Richtung θ gestreut wird sei $\omega_1(\theta)$. Die Wellenfunktion welche die Bewegung eines Photons zwischen dem Spalt und dem Schirm beschreibt sei $|b_1\rangle$. Für das zweite Photon seien die entsprechenden Grössen durch den Index '2' angegeben.

a) Wie lautet die Wellenfunktion $\Psi(\theta)$ für ein Photon welches in der Richtung θ auf dem Schirm auftrift und wie die dazugehörende Wahrscheinlichkeit? Gibt es Interferenz (von dem Photon mit sich selbst)?

b) Nehmen wir nun an, es gäbe zwei identische Quellen an der selben Stelle und diese würden unabhängig voneinander je ein Photon aussenden? Wie lauten dann die entsprechenden Wellenfunktionen und Wahrscheinlichkeiten wenn beide Photonen am selben Ort am Schirm auftreffen? Was ändert sich wenn die Quellen viele Photonen aussenden?

22.) Potentialtopf

Gegeben Sei ein Potentialtopf der Form:

$$I: \quad V(x) = U_0 \qquad -\infty < x < -a/2$$

$$II: \quad V(x) = 0 \qquad -a/2 < x < a/2$$

$$III: \quad V(x) = U_0 \qquad a/2 < x < \infty$$

Bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte der Schrödinger Gleichung für dieses Potential unter der Annahme $0 < E < U_0$. Sie erhalten eine transzendente Gleichung. Lösen Sie diese graphisch für ein Elektron in einem Potentialtopf mit $a = 1\ nm$ und $V_0 = 5\ eV$.

Hinweis: machen Sie im Bereich II den Ansatz $\Psi(x) = B\sin(kx + \phi)$.

23.) Elektronenstrahl

Die Interpretation des Absolutquadrats der Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte besagt, daß die Größe $\varrho(\vec{r},t)dV = |\psi(\vec{r},t)|^2 dV$ der Wahrscheinlichkeit proportional ist, ein Teilchen bei einer Messung in dem angegebenen Volumselement anzutreffen. Wenn sich das Teilchen bewegt, wird im Laufe der Zeit die Wahrscheinlichkeit abnehmen, das Teilchen in einem begrenzten Volumen anzutreffen, während sie außerhalb des Volumens in gleichem Maß zunimmt. Mit anderen Worten, einem sich bewegenden Teilchen ist neben seiner Wahrscheinlichkeitsdichte auch eine Wahrscheinlichkeitsflußdichte oder Stromdichte $\vec{j}$ zugeordnet, die mit der Wahrscheinlichkeitsdichte über die Kontinuitätsgleichung verknüpft sein muß.

a) Zeigen Sie, daß für ein bewegtes Teilchen mit der Wellenfunktion $\psi(r,t)$ die zeitliche Änderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Volumen V gegeben ist durch:

$$\frac{i}{\hbar}\int\limits_V \Big\{\psi H \psi^* - \psi^* H \psi\Big\} dV$$

H ist die Hamiltonfunktion

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(\vec{r})\psi$$

b) Zeigen Sie, daß der Teilchenstrom $\vec{j}$ durch die Größe

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{i\hbar}{2m}\Big[\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\Big]$$

[1] Wolfgang Werner

beschrieben wird und der Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0$$

genügt.
Hinweis: es gilt $\psi\Delta\psi^* - \psi^*\Delta\psi = \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi)$
c) Wie muß bei einer eindimenionalen ebenen Welle

$$\psi(x,t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$$

die Normierungskonstante A gewählt werden, damit diese Welle einem Teilchenstrom der Dichte 1 entspricht (das heißt, daß durch die Einheitsfläche senkrecht zur Bewegungsrichtung $\vec{p}/|\vec{p}| = \vec{p}/mv$ ein Teilchen pro Zeiteinheit hindurchgeht.)

24.) Streuung eines Elektrons an einem Potentialtopf
Gegeben Sei ein Potentialtopf der Form:

$$I: \quad V(x) = 0 \qquad x < 0$$

$$II: \quad V(x) = U_0 \qquad 0 < x < b$$

$$III: \quad V(x) = 0 \qquad b < x$$

Eine derartige Potentialverteilung wird als Potentialwall bezeichnet. Es soll lediglich eine Abhängigkeit des Potentials von der räumlichen Variablen x geben. Von links falle ein Elektronenstrom (in Richtung der positiven x-Achse) ein.
a) Berechnen Sie die Lösung der Schrödingergleichung für die 3 Bereiche. Versuchen Sie dann allgemein den durch den Potentialwall durchgehenden Anteil des Elektronenstrahls (Transmission T) zu berechnen. Dabei sei die Elektronenenergie $E = 100\ eV$, die Höhe des Potentialwalls $U_0 = 50\ eV$ und seine Breite $b = 1\mathring{A}$. Zur Berechnung beachten Sie, dass $T = J_d/J_e$, wobei J_d der durch den Wall hindurchgehende Anteil und J_e der einfallende Elektronenstrom ist. In der Quantenmechanik gilt allgemein für den Strom (Fluß) anstelle von nv:

$$J = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi)$$

Setzen Sie weiters bei der Rechnung $k = \{2m(E-U_0)/\hbar^2\}^2$ und $k_0 = \{2mE/\hbar^2\}^2$

25.) Streuung eines Elektrons an einem Potentialtopf: Fortsetzung
a) Es liege ein Potentialwall vor (wie in Bsp 24.), dessen Höhe $U_0 = 20\ eV$ höher ist als die Teilchenenergie $E = 10\ eV$. Berechnen Sie wieder die Transmission T, indem Sie in der vorigen Rechnung k durch ik an geeigneter Stelle ersetzen. Wenn Sie die Zahlenwerte gleich einsetzen wird die Rechnung wesentlich vereinfacht.
b) Wenn Sie in Teil (b) $b = 10\mathring{A}$ setzen, wie groß wird dann sie transmission T?

Punkteschlüssel: Bsp. 21:1; Bsp. 22:1; Bsp. 23:1; Bsp. 24:1; Bsp 25:1