Grundlagen der Physik 3
Lösung zu Übungsblatt 10

Daniel Weiss

12. Januar 2011

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

$T_{ij}^2 =: M$ entspricht dem Maßtensor.

a) Bestimme zunächst den Maßtensor für Zylinderkoordinaten. Die Jacobimatrix lautet hier:

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich der Maßtensor:

$$\begin{aligned} M_{\text{Zylinder}} = J^T J &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -r\sin(\phi) & r\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Analog dazu folgt mit der Jacobimatrix der Kugelkoordinaten

$$J = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) & r\sin(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

der zugehörige Maßtensor

$$M_{\text{Kugel}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\theta) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Es gilt beide Male

$$T_{ij} = \delta_{ij} T_{ij} \tag{5}$$

Die Tensoren besitzen also nur Diagonalelemente.

b) Einsetzen in die im Aufgabenblatt gegebene Formel führt zu:

$$\Delta_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6}$$

$$\Delta_{\text{Kugel}} = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \tag{7}$$

Aufgabe 2

Hierbei werden die Eigenfunktionen eines Elektrons im Coulombpotential benötigt. Diese sind z.B. im Demtröder in Tabelle 5.2 zu finden.
Da wir den Erwartungswert des Radius dieser dreidimensionalen Funktionen benötigen, müssen wir auch über den Raumwinkel integrieren. Der Erwartungswert des Radius des durch die Quantenzahlen n, l, m beschriebenen Orbitals ist

$$\langle r \rangle = \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \Psi^\star_{n,l,m} \underbrace{\hat{r}}_{\text{Ortsoperator}} \Psi_{n,l,m} d\phi \underbrace{r^2\sin(\theta)}_{\text{Funktionaldeterminante}} d\theta dr \tag{8}$$

a)

$$\Psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_0}} \tag{9}$$

Da es sich um ein Wasserstoffatom handelt, ist $Z = 1$. Eingesetzt in Gleichung 8 folgt der Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\langle r\rangle &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} d\phi r^2 \sin(\theta) d\theta dr = \\ &= \int_0^{\infty} 4\frac{r^3}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = \frac{3}{2} a_0 \end{aligned} \tag{10}$$

b)

$$\Psi_{2,0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle r\rangle &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r}{32\pi a_0^3} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} d\phi r^2 \sin(\theta) d\theta dr = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{r^3}{8a_0^3} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} dr = 12 a_0 \end{aligned} \tag{12}$$

c)

$$\Psi_{2,1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \cos(\theta) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle r\rangle &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r}{32\pi a_0^3} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-\frac{r}{a_0}} d\phi r^2 \sin(\theta)\cos^2(\theta) d\theta dr = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{r^5}{24 a_0^5} e^{-\frac{r}{a_0}} dr = 5 a_0 \end{aligned} \tag{14}$$

d)

$$\Psi_{2,1,1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \sin(\theta) e^{\pm i\phi} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle r\rangle &= \int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r^2}{64\pi a_0^4} e^{-\frac{r}{a_0}} d\phi r^2 \sin^3(\theta) d\theta dr = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{r^5}{24 a_0^5} e^{-\frac{r}{a_0}} dr = 5 a_0 \end{aligned} \tag{16}$$

Aufgabe 3

siehe Demtröder Kapitel 5, Aufgabe 7 (1 zu 1 übernommen).