

Grundlagen der Physik 3

Lösung zu Übungsblatt 2

Daniel Weiss

17. Oktober 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1 - Zustandsfunktion eines Van-der-Waals-Gases	1
a) Zustandsfunktion	1
b) Bestimmung von Kohäsionsdruck und Kovolumen	1
c) physikalische Bedeutung der Konstanten	2
Aufgabe 2 - Berechnung der Van-der-Waals-Konstanten für 2 Gase	2
a) Van-der-Waals-Konstanten	2
b) Atomradien	3
Aufgabe 3 - Flugzeit-Massenspektroskopie	3
Aufgabe 4 - Atome im Festkörper	4
a) Wellenlänge der Röntgenstrahlung	4
b) Netzebenenabstand	5
c) Elementarzelle	5
d) Raumausfüllungsfaktor	5

Aufgabe 1

- a) Die Zustandsfunktion erhält man durch Auflösen der Van-der-Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (1)$$

nach $p(V, T)$.

$$p(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \quad (2)$$

- b) Gesucht sind die beiden Konstanten a (Kohäsionsdruck) und b (Kovolumen). Bei dem kritischen Punkt besitzt die Funktion $p(V, T_k)$ einen Sattelpunkt. Das bedeu-

tet, dass die erste und zweite Ableitung *beide* 0 sind.

$$\frac{\partial}{\partial V} p(V_k, T_k) = -\frac{RT_k}{(V_k - b)^2} + \frac{2a}{V_k^3} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial V^2} p(V_k, T_k) = \frac{2RT_k}{(V_k - b)^3} - \frac{6a}{V_k^4} = 0 \quad (4)$$

Aus Gleichung 3 folgt durch Umformen:

$$a = \frac{RT_k}{2(V_k - b)^2} V_k^3 \quad (5)$$

Setzt man dies nun in Gleichung 4 und formt erneut um, erhält man für das Kovolumen:

$$b = \frac{1}{3} V_k \quad (6)$$

Dies wiederum in Gleichung 3 eingesetzt liefert den Kohäsionsdruck.

$$a = \frac{9}{8} RT_k V_k \quad (7)$$

c) Vergleicht man die Van-der-Waals-Gleichung für 1mol

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (8)$$

mit der allgemeinen Gasgleichung für 1mol

$$pV = RT \quad (9)$$

, so sieht man, dass der Kohäsionsdruck a eine Anpassung des Druckes und das Kovolumen b eine Anpassung des Volumens für ein reales Gas sind. Die Dimensionen der beiden Konstanten sind

$$[a] = \frac{\text{Jm}^3}{\text{mol}^2} \quad (10)$$

$$[b] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \quad (11)$$

Aufgabe 2

a) Die Gleichungen für die Konstanten wurden bereits in Aufgabe 1 hergeleitet. Es muss für die beiden Gase noch das kritische Volumen bestimmt werden, welches zur Berechnung beider Konstanten benötigt wird. Ausgehend von der Van-der-Waals-Gleichung werden beide Konstanten eingesetzt, sodass V_k die einzige Unbekannte ist.

$$\left(p_k + \frac{9RT_k}{8V_k^2}\right) \left(V_k - \frac{1}{3}V_k\right) = RT_k \quad (12)$$

Auflösen nach V_k liefert:

$$V_k = \frac{3RT_k}{8p_k} \quad (13)$$

Dieses Ergebnis in die Gleichungen für die beiden Konstanten eingesetzt ergibt eine vom Volumen unabhängige Lösung:

$$a_1 = \frac{27R^2T_k^2}{64p_k} = 1,385 \cdot 10^{-1} \frac{\text{Jm}^3}{\text{mol}^2} \quad (14)$$

$$b_1 = \frac{RT_k}{8p_k} = 3,18 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}^2} \quad (15)$$

$$a_2 = 6,578 \cdot 10^{-1} \frac{\text{Jm}^3}{\text{mol}^2} \quad (16)$$

$$b_2 = 5,62 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \quad (17)$$

- b) Angenommen das kritische Volumen sei lückenlos mit Molekülen gefüllt. Dann entspricht es dem Volumen, welches 2mol Atome haben, da es sich um ein 2-atomiges Gas handelt.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{V_1}{2N_A} = \frac{3RT_k}{16p_k N_A} \quad (18)$$

Hierbei wurde Gleichung 13 verwendet. Für die beiden Gase ergeben sich nach Umstellen die Radien:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{64} \frac{RT_1}{p_1 N_A \pi}} = 0,27\text{nm} \quad (19)$$

$$r_2 = 0,32\text{nm} \quad (20)$$

Aufgabe 3

Beim Flugzeit-Massenspektrometer werden erzeugte Ionen (in Abbildung 1 mit Hilfe eines Laserstrahls) durch eine angelegte Spannung beschleunigt und nach Durchfliegen einer feldfreien Strecke der Länge L (im Bild d) detektiert. Über die Flugzeit kann ein Rückschluss auf die Masse gemacht werden. Um die Geschwindigkeit der Ionen zu bestimmen, setzt man kinetische und elektrische Energie gleich.

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad (21)$$

Da es sich um einfach ionisierte Teilchen handelt, tragen sie die positive Ladung e . Nimmt man instantane Beschleunigung der Ionen und gleichzeitige Erzeugung aller Ionen zum Zeitpunkt $t = 0$ an, so kann damit die Masse der Ionen berechnet werden.

Die Flugzeit kann über die Länge und die Geschwindigkeit ausgedrückt werden.

$$T = \frac{L}{v} = \frac{L}{\sqrt{\frac{2eU}{m}}} \quad (22)$$

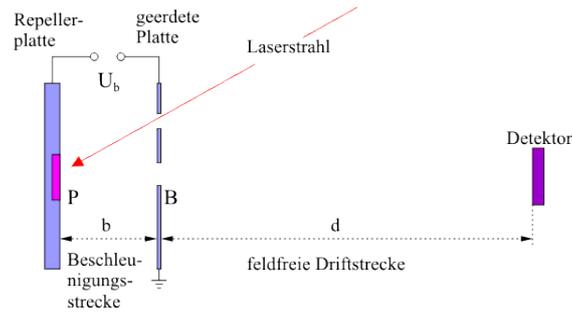


Abbildung 1: Flugzeit-Massenspektrometer

Umstellen liefert eine Formel für die Masse.

$$m = \frac{2eUT^2}{L^2} \quad (23)$$

Damit können nun mit den drei Flugzeiten die drei Massen der drei detektierten Teilchen bestimmt werden.

$$m_1 = 28,013\text{u} \quad (24)$$

$$m_2 = 31,999\text{u} \quad (25)$$

$$m_3 = 39,948\text{u} \quad (26)$$

Die Zuordnung zu bestimmten Atomen/Molekülen ist über die jeweiligen Massen möglich. Es handelt sich bei den drei gemessenen Teilchen um:

$$1 : N_2 \text{ Stickstoff} \quad (27)$$

$$2 : O_2 \text{ Sauerstoff} \quad (28)$$

$$3 : Ar \text{ Argon} \quad (29)$$

Berücksichtigt man noch die Intensitäten, so kann eine Zusammensetzung des Gases angegeben werden.

$$N_2 : \frac{185640\text{cts}}{185640\text{cts} + 49980\text{cts} + 2380\text{cts}} = 78\% \quad (30)$$

$$O_2 : \frac{49980\text{cts}}{185640\text{cts} + 49980\text{cts} + 2380\text{cts}} = 21\% \quad (31)$$

$$Ar : \frac{2380\text{cts}}{185640\text{cts} + 49980\text{cts} + 2380\text{cts}} = 1\% \quad (32)$$

Es handelt sich bei dem Gas also um Luft.

Aufgabe 4

a) Die Energie eines Photons ist

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda} \quad (33)$$

, somit ist die Wellenlänge der Röntgenstrahlung

$$\lambda = \frac{hc}{E} = 1,39\text{\AA} \quad (34)$$

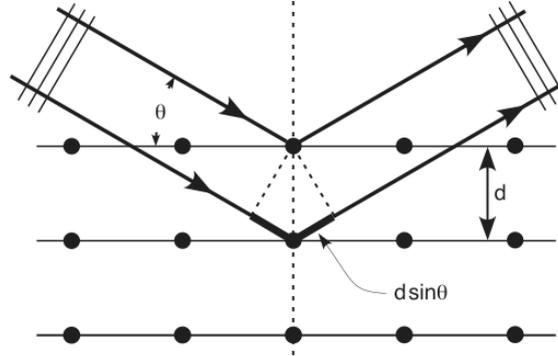


Abbildung 2: Bragg-Reflexion an den Netzebenen

- b) Die eintreffenden Röntgenstrahlen werden von den verschiedenen Netzebenen reflektiert (Bragg-Reflexion). Dabei kommt es zwischen den reflektierten Strahlen zweier benachbarter Ebenen zu einer Phasenverschiebung von Δs . Ist diese Verschiebung ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge interferieren diese Strahlen konstruktiv. Beim ersten Maximum beträgt die Phasenverschiebung demnach genau λ . Der Netzebenenabstand kann nun durch die Messung des Ein- bzw. Ausfallswinkels genau bestimmt werden. Siehe auch Abbildung 2.

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha)} = 2,79\text{\AA} \quad (35)$$

- c) Die Elementarzelle hat den doppelten Netzebenenabstand als Kantenlänge. Siehe hierzu auch Abbildung 3. Generell sind für jede Kristallstruktur unendlich viele verschiedene Elementarzellen möglich. Hier wurde ein Würfel gewählt. Die Aufgabenstellung ist mit der Frage nach der Größe *der* Elementarzelle also ungenau formuliert.

$$a = 5,58\text{\AA} \quad (36)$$

- d) Der Raumausfüllungsfaktor ist der Quotient aus "benutztem" Raum gegenüber dem gesamten zur Verfügung stehenden Raum. Analog dazu bedeutet ein Raumausfüllungsfaktor von 0,5, dass ein Glas z.B. halb voll ist. In der Einheitszelle sind jeweils 4 Atome beider Sorten *ganz* enthalten. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass Randatome nicht ganz, sondern nur teilweise enthalten sind. Beispielsweise sind von jedem Eckatom nur jeweils ein Achtel in der Einheitszelle enthalten.

$$\eta = \frac{V_{\text{Atome}}}{V_{\text{Einheitszelle}}} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3}\pi(1\text{\AA} + 1,8\text{\AA})}{5,58^3\text{\AA}^3} = 65,9\% \quad (37)$$

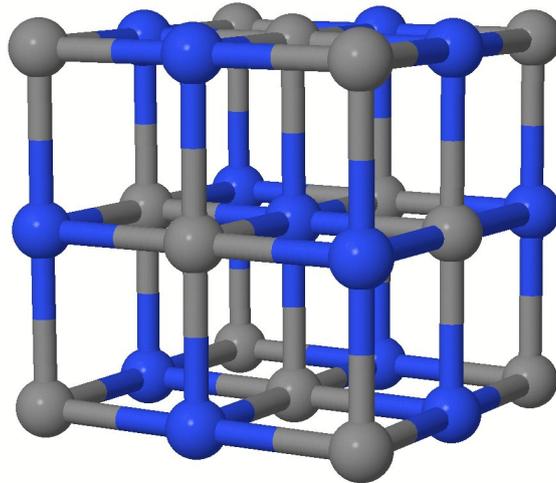


Abbildung 3: Gewählte kubische Elementarzelle

Zum Vergleich mit einem idealen Gas muss das Volumen eines Mols eines idealen Gases bestimmt werden.

$$pV_M = RT \Rightarrow V_M = \frac{RT}{p} \quad (38)$$

Das Volumen der Atome ist

$$V_A = N_A \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (39)$$

Daraus folgt der Raumauffüllfaktor eines idealen Gases bei 0°C und Normaldruck:

$$\eta = \frac{V_A}{V_M} = \frac{6,022 \cdot 10^{23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \frac{4}{3}\pi 1,5^3 \text{Å}^3}{\frac{8,315 \frac{\text{J}}{\text{molK}} \cdot 273,15\text{K}}{1,013 \cdot 10^5 \text{Pa}}} = 3,8 \cdot 10^{-2}\% \quad (40)$$