Grundlagen der Physik 3
Lösung zu Übungsblatt 5

Daniel Weiss

13. November 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a) Es gilt das Stephan-Boltzmann-Gesetz:

$$\frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}} = \sigma A T^4 \tag{1}$$

Weiterhin ist die in den Draht abgegebene elektrische Leistung gleich der Strahlungsleistung (keine Verluste durch Konvektion):

$$P = UI = A\sigma T^4 \Rightarrow I = \frac{\pi l d \sigma T^4}{U} \tag{2}$$

Der elektrische Widerstand im Draht ist

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{U}{I} \Rightarrow I = \frac{U\pi \frac{d^2}{4}}{\rho l} \tag{3}$$

Multipliziert man Gleichungen 2 und 3 miteinander, so erhält man die Stromstärke.

$$I = \sqrt{\frac{\pi^2 d^3 \sigma T^4}{4\rho}} = 42{,}6\text{A} \tag{4}$$

b) Die Masse des Drahtes folgt aus der Dichte:

$$m = \underbrace{\pi \frac{d^2}{4} l}_{=V} \rho \tag{5}$$

Die Leistung, die der Draht abstrahlt ist laut Stefan-Boltzmann:

$$P = -\sigma A T^4 = \frac{\mathrm{dW}}{\mathrm{dt}} \tag{6}$$

Die Abkühlung in Abhängigkeit der abgestrahlten Energie ist

$$\mathrm{dW} = mc\,\mathrm{dT} \tag{7}$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\sigma A T^4}{mc} \tag{8}$$

Diese Differenzialgleichung lässt sich durch Separation der Variablen lösen.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dT}}{T^4} &= -\frac{\sigma A}{mc}\mathrm{dt} && (9) \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3T^3} &= \frac{\sigma A}{mc} t + const. \\ \Leftrightarrow t &= \frac{c\rho d}{12 T^3 \sigma} - \frac{c\rho d}{4\sigma} const. \\ \Leftrightarrow \Delta t &= \frac{c\rho d}{12\sigma}\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right) = 1{,}65\text{s} && (10) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Aus der Literatur werden folgende Beziehungen für den zentralen elastischen Stoß übernommen:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_2 + u_2 && (11) \\ u_2 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 && (12) \\ u_1 &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 && (13) \end{aligned}$$

Diese lassen sich aus der Impulserhaltung und der Energieerhaltung herleiten. Die kinetischen Energien sind demnach:

$$^2E_1 = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2\right)^2 \tag{14}$$

$$^2E_2 = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2\right)^2 \tag{15}$$

wobei der erste Index für vor (1) bzw. nach (2) dem Stoß und der Zweite für das jeweilige Teilchen steht.

b) Die Änderung der kinetischen Energie des zweiten (stoßenden) Teilchens entspricht der kinetischen Energie des ersten (gestoßenen) Teilchens nach dem Stoß, da es sich um einen elastischen Stoß handelt.

c) Mit der Impulserhaltung folgt

$$m_2v_2 = m_2u_2 + m_1u_1 \Rightarrow m_1 = \frac{m_2v_2 - m_2u_2}{u_1} \tag{16}$$

Die Geschwindigkeiten v stehen für vor dem Stoß und u für nach dem Stoß. Aus den Gleichungen für die kinetische Energie:

$$u_2 = \sqrt{\frac{2\cdot{}^2E_2}{m_2}} \tag{17}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\cdot{}^1E_2}{m_2}} \tag{18}$$

$$u_1 = v_2 + u_2 \tag{19}$$

Die letzte Gleichung ist dabei aus a) übernommen (Literatur). Die Masse ist dann

$$m_1 = \frac{\sqrt{^1E_2} - \sqrt{^2E_2}}{\sqrt{^1E_2} + \sqrt{^2E_2}}m_2 \tag{20}$$

Aufgabe 3

a) Es gilt der Energieerhaltungssatz

$$\begin{aligned}
E_0^p + E_0^e &= E_1^p + E_1^e && (21)\\
h\nu_0 + m_e c^2 &= h\nu_1 + \gamma m_e c^2\\
h(\nu_0 - \nu_1) &= m_e c^2(\gamma - 1)\\
h(\nu_0 - \nu_1) + m_e c^2 &= m_e c^2 \gamma\\
h^2(\nu_0 - \nu_1)^2 + m_e^2 c^4 + 2hm_e c^2(\nu_0 - \nu_1) &= m_e^2 c^4 \gamma^2\\
\frac{h^2}{c^2}(\nu_0 - \nu_1)^2 + 2hm_e(\nu_0 - \nu_1) &= m_e^2 c^2(\gamma^2 - 1)\\
\frac{h^2}{c^2}(\nu_0 - \nu_1)^2 + 2hm_e(\nu_0 - \nu_1) &= m_e v_1^{e2} \gamma^2 && (22)
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt die Impulserhaltung:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\vec{p_0^e}}_{=0} + \vec{p_0^p} &= \vec{p_1^e} + \vec{p_1^p}\\
\vec{p_1^e} &= \vec{p_0^p} - \vec{p_1^p}\\
m_e \gamma \vec{v_1^e} &= \hbar\vec{k_0} - \hbar\vec{k_1}\\
m_e^2 \gamma^2 v_1^{e2} &= \hbar^2 k_0^2 + \hbar^2 + k_1^2 - 2\hbar k_0 k_1 \cos(\theta)\\
m_e^2 \gamma^2 v_1^{e2} &= \frac{h^2}{c^2}(\nu_0^2 + \nu_1^2 - 2\nu_0\nu_1 \cos(\theta)) && (23)
\end{aligned}$$

Gleichsetzen der beiden äquivalenten Ausdrücke ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{h^2}{c^2}(\nu_0^2 + \nu_1^2 - 2\nu_0\nu_1)^2 + 2hm_e(\nu_0 - \nu_1) &= \frac{h^2}{c^2}(\nu_0^2 + \nu_1^2 - 2\nu_0\nu_1 \cos(\theta))\\
-\frac{2h\nu_0\nu_1}{c^2} + 2m_e(\nu_0 - \nu_1) &= -\frac{2h\nu_0\nu_1 \cos(\theta)}{c^2}\\
\nu_0 - \nu_1 &= \frac{h\nu_0\nu_1}{c^2 m_e}(1 - \cos(\theta))\\
&\quad \text{mit } \nu = \frac{c}{\lambda}\\
\frac{c}{\lambda_0} - \frac{c}{\lambda_1} &= \frac{h}{\lambda_0\lambda_1 m_e}(1 - \cos(\theta))\\
\lambda_1 - \lambda_0 &= \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\theta))\\
&\quad \text{mit } (1 - \cos(\theta)) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
\lambda_1 &= \lambda_0 + \frac{2h}{m_e c}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\
\lambda_1 &= \lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) && (24)
\end{aligned}$$

b) Übernehme die vorletzte Gleichung aus der Energieerhaltung von vorher.

$$
\begin{aligned}
\frac{h^2}{c^2}(\nu_0-\nu_1)^2 + 2hm_e(\nu_0-\nu_1) &= m_e^2c^2(\gamma^2-1) \\
\frac{h^2}{m_e^2c^4}(\nu_0-\nu_1)^2 + \frac{2h}{m_ec^2}(\nu_0-\nu_1)+1 &= \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
\frac{1}{\frac{h^2}{m_e^2c^4}(\nu_0-\nu_1)^2 + \frac{2h}{m_ec^2}(\nu_0-\nu_1)+1} &= 1-\frac{v^2}{c^2} \\
c\sqrt{1-\frac{1}{\frac{h^2}{m_e^2c^4}(\nu_0-\nu_1)^2 + \frac{2h}{m_ec^2}(\nu_0-\nu_1)+1}} &= v \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

a) Einsetzen in die in Aufgabe 3 gefundene Formel für den Compton-Effekt liefert:

$$\lambda_1 = 5{,}24 \cdot 10^{11}\mathrm{m} \qquad (26)$$

b) Impulserhaltung in Vektorschreibweise:

$$\vec{p_e} = \vec{p_{p0}} - \vec{p_{p1}} = \begin{pmatrix} p_{p0} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} p_{p1} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta) \\ \sin(\Theta) \end{pmatrix} p_e \qquad (27)$$

Diese Beziehung kann aus der Skizze abgelesen werden. Dividiert man nun die

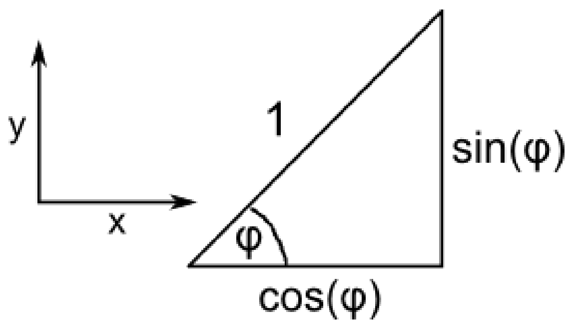

Abbildung 1: Photon fliegt in x-Richtung ein und wird um den Winkel ϕ nach oben abgelenkt. Das Elektron wird um den Winkel Θ nach unten abgelenkt (hier nicht eingezeichnet)

y-Koordinaten durch die x-Koordinaten, so erhält man:

$$\tan(\Theta) = -\frac{p_{p1}\sin(\phi)}{p_{p0} - \cos(\phi)p_{p1}} \qquad (28)$$

Nach ein wenig Umformung erhält man:

$$\Theta = \arctan\left(-\frac{\sin(\phi)}{\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \cos(\phi)}\right) \tag{29}$$