Grundlagen der Physik 3
Lösung zu Übungsblatt 7

Daniel Weiss

18.11.2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Im Folgenden werden Teile a) und b) gemeinsam berechnet. Der einzige Unterschied ist, dass anstatt der reduzierten Masse μ bei Teil a) die Masse des Elektrons eingesetzt werden kann (Kernmasse vernachlässigt).

Im Bohrschen Atommodell wird der Kern von einem Elektron (wasserstoffähnliches Atom) umkreist - ähnlich der Bahn des Mondes um die Erde. Da sowohl der Kern als auch das Elektron einander anziehen, kreisen beide um den gemeinsamen Schwerpunkt. Zur Vereinfachung der Rechnung betrachten wir daher das Schwerpunktsystem und rechnen mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_e m_k}{m_e + m_k} \underbrace{\approx}_{\text{nur Teil a)}} m_e \tag{1}$$

, welche unter der Annahme, dass die Kernmasse viel größer ist als die Elektronenmasse zu m_e wird.

Für die Kreisbahn gilt, dass die Coulombkraft die Zentripetalkraft ist.

$$\begin{aligned} \frac{\mu v^2}{r} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \mu v^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Betrachtet man das Elektron als *Materiewelle* und ordnet ihm - je nach Geschwindigkeit - eine Wellenlänge zu, so kann ein stabiler Atomzustand als ein solcher definiert werden, in dem das Elektron in „ganzen Wellenlängen“ auf den Bahnradius „passt“. Also

$$n\lambda = 2\pi r \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi r}{n} \tag{3}$$

Mit der Beziehung für die de-Broglie-Wellenlänge folgt

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\mu v} \tag{4}$$

$$v = \frac{h}{\mu\lambda} \overset{\text{(Gl. 3)}}{=} n\frac{h}{2\pi\mu r} \tag{5}$$

Diese Gleichung ergibt mit der vorher gefunden Beziehung für den Radius (Gl. 2):

$$r = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{Ze^2\pi\mu} = \frac{n^2}{Z}a_0 \tag{6}$$

mit dem Bohrschen Radius a_0. Daraus folgt für die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{hZ}{2\pi\mu n a_0} \tag{7}$$

Die kinetische Energie ist:

$$E_{\text{kin}} = \frac{\mu}{2}v^2 = \frac{h^2 Z^2}{8\pi^2\mu n^2 a_0^2} \tag{8}$$

Die potentielle Energie:

$$\int_\infty^r F_{\text{Coulomb}}\,\mathrm{dr} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = -\frac{Z^2h^2}{4\pi^2 n^2 a_0^2\mu} = -2E_{\text{kin}} \tag{9}$$

Die Gesamtenergie ist dann

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -E_{\text{kin}} = -\frac{h^2Z^2}{8\pi^2\mu n^2 a_0^2} \tag{10}$$

Aufgabe 2

Die kinetische Energie soll sein:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_e\left(\frac{1}{10}c\right)^2 = \frac{1}{200}m_ec^2 \tag{11}$$

Wir rechnen mit der Näherung $\mu \approx m_e$. Aus Aufgabe 1 folgt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{h^2Z^2}{8\pi^2\mu n^2a_0^2} \geq \frac{1}{200}m_ec^2 \tag{12}$$

Umformen führt zu

$$Z \geq \sqrt{\frac{8c^2\pi^2n^2a_0^2m_e^2}{200h^2}} = 13{,}7 \tag{13}$$

Also ab $Z = 14$ und es handelt sich um *Silizium*.

Aufgabe 3

Zu integrieren ist

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma}}\,\mathrm{dx} \tag{14}$$

Zunächst einmal wird $(x - x_0) =: a$ substituiert.

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{\sigma}}\,\mathrm{da} \tag{15}$$

Anschließend quadrieren wir beide Seiten:

$$C^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{\sigma}}\,\mathrm{da}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{b^2}{\sigma}}\,\mathrm{db} \tag{16}$$

Die zweite Integrationsvariable nennen wir b, wobei der Name völlig egal ist. „Zusammenziehen“ der Integrale führt zu:

$$C^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{\sigma}}e^{-\frac{b^2}{\sigma}}\,\mathrm{da}\,\mathrm{db} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2+b^2}{\sigma}}\,\mathrm{da}\,\mathrm{db} \tag{17}$$

Nun transformieren wir diese Gleichung in Polarkoordinaten mit

$$a^2 + b^2 =: r^2 \tag{18}$$

Das ergibt:

$$C^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{\sigma}}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{dr} \tag{19}$$

wobei r die *Funktionaldeterminante* ist. Ausführen des Winkelintegrals und weitere Substitution $u := r^2$ führen mit $\mathrm{du} = 2r\,\mathrm{dr}$ zu:

$$C^2 = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{u}{\sigma}}\,\mathrm{du} = \pi \left[-\sigma e^{-\frac{u}{\sigma}}\right]_0^\infty = \sigma\pi \tag{20}$$

Daraus folgt für C:

$$C = \sqrt{\sigma\pi} \tag{21}$$

Aufgabe 4

Zuallererst schreiben wir das Integral ein wenig anders

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma}} e^{-ikx}\,\mathrm{dx} &(22)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2+ik\sigma x}{\sigma}}\,\mathrm{dx} &(23)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2xx_0+x_0^2+ik\sigma x}{\sigma}}\,\mathrm{dx} &(24)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2x(x_0-\frac{ik\sigma}{2})+x_0^2}{\sigma}}\,\mathrm{dx} &(25)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2x(x_0-\frac{ik\sigma}{2})+(x_0-\frac{ik\sigma}{2})^2-(x_0-\frac{ik\sigma}{2})^2+x_0^2}{\sigma}}\,\mathrm{dx} &(26)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(x_0-\frac{ik\sigma}{2}))^2-(x_0-\frac{ik\sigma}{2})^2+x_0^2}{\sigma}}\,\mathrm{dx} &(27)\\
&\quad \text{Mit } a := (x-(x_0-\frac{ik\sigma}{2})) \text{ und } c := -\left(x_0-\frac{ik\sigma}{2}\right)^2+x_0^2 \text{ folgt:}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2+c}{\sigma}}\,\mathrm{da} = e^{-\frac{c}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{\sigma}}\,\mathrm{da} &(28)\\
&\quad \text{Mit der Lösung des Integrals aus Aufgabe 3:}\\
&= e^{-\frac{c}{\sigma}}\sqrt{\sigma\pi} &(29)
\end{aligned}$$

Berechnen von c:

$$\begin{aligned}
c &= -\left(x_0-\frac{ik\sigma}{2}\right)^2+x_0^2 &(30)\\
&= -x_0^2+2x_0\frac{ik\sigma}{2}+\frac{k^2\sigma^2}{4}+x_0^2 &(31)\\
&= x_0ik\sigma+\frac{k^2\sigma^2}{4} &(32)
\end{aligned}$$

Der Betrag ist dann

$$\|\tilde{F}(k)\|_2 = \underbrace{\|e^{-x_0 ik}\|_2}_{=1} \|e^{-\frac{k^2\sigma}{4}}\sqrt{\sigma\pi}\|_2 = e^{-\frac{k^2\sigma}{4}}\sqrt{\sigma\pi} \tag{33}$$

Das Endergebnis ist demnach

$$\|\tilde{F}(k)\|_2^2 = e^{-\frac{k^2\sigma}{2}}\sigma\pi \tag{34}$$