Grundlagen der Physik 3
Lösung zu Übungsblatt 8

Daniel Weiss

1. Dezember 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Die Balmer-Serie beschreibt das *Zurückfallen* eines Elektrons auf das 2. Niveau (vgl. Bohrsches Atommodell). Laut Bohr gilt für die Energie des Elektrons (auf einem der letzten Übungszettel hergeleitet):

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\frac{Z^2}{n^2} = -\underbrace{Ry}_{\text{Rydberg-Konstante}} \cdot hc\frac{1}{n^2} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich als Differenz der beiden Wellenlängen:

$$\Delta E_n = Ry\ hc\left(-\frac{1}{163^2}+\frac{1}{162^2}\right) = h\nu = h\frac{c}{\lambda} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{hc}{Ry\ hc\left(-\frac{1}{163^2}+\frac{1}{162^2}\right)} = 4{,}249\cdot 10^{-14}\mathrm{m} \tag{3}$$

Analog lässt sich auch die Wellenlänge berechnen; also das Zurückfallen des Elektrons von dem 162. oder dem 163. Niveau auf das 2. Niveau. Dabei macht es einen vernachlässigbaren Unterschied welche Wellenlänge man nimmt. Es folgt:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{4{,}249\cdot 10^{-14}\mathrm{m}}{2{,}279\cdot 10^{-8}\mathrm{m}} = 1{,}86\cdot 10^{-6} \tag{4}$$

Aufgabe 2

a) Es soll für die gegebene Funktion

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\delta_0}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\delta_0^2} + \frac{i}{\hbar}p_0 x} \tag{5}$$

eines gaußglockenförmigen Wellenpakets die Ortsunschärfe

$$(\Delta X)_0 = \sqrt{\langle X^2\rangle_0 - \langle X\rangle_0^2} \tag{6}$$

bestimmt werden. Vorab einige Integrale, die später benötigt werden. Im Blatt 7 wurde bereits gezeigt (Aufgabe 3), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{b}}\,\mathrm{da} = \sqrt{\pi b} \tag{7}$$

gilt. Außerdem brauchen wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\frac{a^2}{u}}\,\mathrm{da} = \left| \begin{matrix} f := a^2 \\ \mathrm{da} = \frac{1}{2a}\,\mathrm{df} \end{matrix} \right| = \int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{f}{u}}\,\mathrm{df} = 0 \tag{8}$$

Man beachte die sich durch die Substitution ergebenden neuen Integrationsgrenzen, wegen denen das Integral 0 ergeben muss. Weiterhin wird das Betragsquadrat der Wellenpaketsfunktion benötigt:

$$\|\Psi(x,0)\|_2^2 = \Psi(x,0)\overline{\Psi}(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_0} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\delta_0^2}} \tag{9}$$

Zunächst bestimmen wir das Quadrat des Erwartungswertes $\langle X\rangle_0^2$. Der Erwartungswert ist das Produkt aus den einzelnen Werten mit ihrer Auftrittswahrscheinlichkeit (siehe auch Herleitung der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit bei der Maxwell-Boltzmann-Verteilung im letzten Semester).

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle_0^2 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x\|\Psi(x,0)\|_2^2\,\mathrm{dx}\right]^2 = \left| \begin{matrix} u := (x-x_0) \\ \mathrm{du} = \mathrm{dx} \\ x = u + x_0 \end{matrix} \right| = \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} (u+x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_0} e^{-\frac{u^2}{2\delta_0^2}}\,\mathrm{du}\right]^2 = \\
&= \frac{1}{2\pi\delta_0^2}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-\frac{u^2}{2\delta_0^2}}\,\mathrm{du}}_{=0 \text{ wegen Gl. 8}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_0 e^{-\frac{u^2}{2\delta_0^2}}\,\mathrm{du}}_{\text{siehe Gl. 7}}\right]^2 = \\
&= \frac{1}{2\pi\delta_0^2}\left[x_0\sqrt{2\delta_0^2\pi}\right]^2 = x_0^2
\end{aligned} \tag{10}$$

Als nächstes berechnen wir den Erwartungswert von X^2:

$$
\begin{aligned}
\langle X^2\rangle_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \|\Psi(x,0)\|_2^2 \,\mathrm{dx} = \left| \begin{array}{c} u := \frac{x-x_0}{\sqrt{2}\delta_0} \\ \mathrm{dx} = \sqrt{2}\delta_0 \,\mathrm{du} \\ x = \sqrt{2}\delta_0 u + x_0 \end{array} \right| = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\delta_0 u + x_0)^2}{\sqrt{2\pi}\delta_0} e^{-u^2} \sqrt{2}\delta_0 \,\mathrm{du} = \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\delta_0^2 u^2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \,\mathrm{du}}_{\text{siehe Hinweis auf Angabenblatt}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}\delta_0 u x_0}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \,\mathrm{du}}_{=0 \text{ wegen Gl. 8}} + \\
&\quad + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_0^2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \,\mathrm{du}}_{\text{siehe Gl. 7}} = \\
&= \frac{2\delta_0^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{x_0^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \delta_0^2 + x_0^2 \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Es folgt also für die gesuchte Beziehung:

$$
(\Delta X)_0 = \sqrt{\delta_0^2 + x_0^2 - x_0^2} = \delta_0 \qquad (12)
$$

b)

c)

$$
(\Delta X)_0 (\Delta P)_0 = \delta_0 \frac{\hbar}{2\delta_0} = \frac{\hbar}{2} \qquad (13)
$$

Das Ergebnis kennt man bereits aus der Heißenbergschen Unschärferelation.