1. **Zweizustands-System und Superposition:** Blochkugel am Beispiel der Polarisation; ein Photon befinde sich in folgendem Zustand:

$$|\Psi\rangle = \cos(\pi/4)|H\rangle + \sin(\pi/4)\cdot e^{-\frac{i\cdot\pi}{4}}|V\rangle$$

a) Wo auf der Blochkugel befindet sich der Zustand?
b) Stellen Sie diesen Zustand in der Basis $|+45°\rangle, |-45°\rangle$ dar.
c) Stellen Sie diesen Zustand in der Basis $|\sigma^+\rangle, |\sigma^-\rangle$ dar.

2. **Interferometrie und Zweizustands-Systeme: Superposition und Bloch-Kugel:** Beschreiben Sie ein **Mach-Zehnder Interferometer** durch den **Weg** den ein Quantenzustand auf der Blochkugel zurücklegt.
<u>*Hinweis:*</u> *Ein symmetrischer Strahlteiler entspricht einer Rotation um die x-Achse*

a) Wie lässt sich ein Phasenschub im Interferometer auf der Blochkugel beschreiben?
b) Wie sieht der Weg auf der Blochkugel aus für einem Phasenschub $\Delta\Phi$ von

$\Delta\Phi = \frac{\pi}{2}$

$\Delta\Phi = -\frac{\pi}{2}$

$\Delta\Phi = \pi$

$\Delta\Phi = 2\cdot\pi$

$\Delta\Phi = -17{,}25\cdot\pi$

3. **Zwei Zweizustands-Systeme – Verschränkung und Superposition:** Die Bell-Zustände

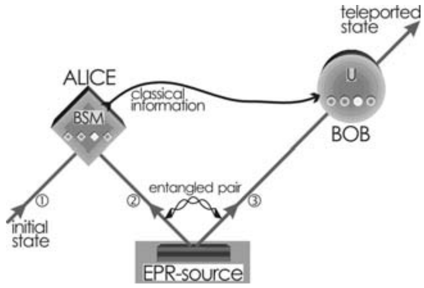
$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[|0\rangle_1|0\rangle_2 \pm |1\rangle_1|1\rangle_2\right]$$
$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[|1\rangle_1|0\rangle_2 \pm |0\rangle_1|1\rangle_2\right]$$

stellen eine **vollständige Basis** der Zustände für die beiden Zweizustands-Systeme dar. Stellen sie folgende Zustände in der Basis der Bellzustände dar:

$$|0\rangle_1|0\rangle_2,\quad |1\rangle_1|1\rangle_2,\quad |1\rangle_1|0\rangle_2,\quad |0\rangle_1|1\rangle_2$$
$$\frac{1}{2}\cdot|0\rangle_1|0\rangle_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot|1\rangle_1|1\rangle_2$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot|0\rangle_1|1\rangle_2 - \frac{1}{2}\cdot|1\rangle_1|1\rangle_2$$

<u>Bitte Seite wenden!</u>

4. **Zwei Zweizustands-Systeme – Quantenteleportation:** Alice hat einen **unbekannten** Quantenzustand $|\phi\rangle_1 = \alpha\,|0\rangle_1 + \beta\,|1\rangle_1$, den sie Bob schicken möchte, aber keinen **direkten** Quanten-Link zu Bob.



a) warum kann Alice den Zustand nicht über eine klassischen Kommunikationskanal schicken?

Alice und Bob besorgen sich als Quantenressource einen **verschränkten Zustand**. Teilchen *(2)* geht an Alice, Teilchen *(3)* an Bob.

$$|\Phi^+\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_2\,|0\rangle_3 + |1\rangle_2\,|1\rangle_3\right)$$

Alice misst nun die beiden Quantenzustände *(1)* und *(2)* in der Bell-Basis der beiden Zweizustands-systeme, und teilt Bob das Ergebnis $|\Phi^\pm\rangle_{12}$ oder $|\Psi^\pm\rangle_{12}$ über einen klassischen Kommunikationskanal mit.

b) welche Operationen muss Bob an seinem Quantenzustand *(3)* ausführen, damit er den unbekannten Quantenzustand *(1)* herstellen kann?

c) was ist mit dem ursprünglichen Zustand *(1)* passiert?

Hinweis: Der Vorschlag zum obigen Beispiel befindet sich in: Ch. Bennet et al. PRL 70, 1895 (1993), das zugehörige Experiment wird in N. Bouwmeester et al. Nature 390, 575 (1997) beschrieben.

5. **Materiewellen, Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit:** Man bestimme

a) die **Phasengeschwindigkeit v_{Ph}** einer ebenen Materiewelle, *(Lösung: $v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\hbar k}{2m}$)*

b) die **Gruppengeschwindigkeit v_g** eines Materiewellenpaketes. *(Lösung: $v_{\mathrm{g}} = \frac{\hbar k}{m}$)*

c) Wie hängen die Phasengeschwindigkeit **v_{Ph}**, die Gruppengeschwindigkeit **v_g** und die Teilchengeschwindigkeit **v_T** für ein Teilchen mit **gegebenem Impuls p** und **gegebener kinetischer Energie E_{kin}** zusammen? *(Lösung: $v_{\mathrm{g}} = 2v_{\mathrm{Ph}} = v_{\mathrm{T}}$)*

6. **Zeitabhängiges Unschärfeprodukt – „Zerfliessen" eines Gauß-glockenförmigen Wellenpaketes:** Die zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung für ein **freies Teilchen** läßt sich in der Form

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\Delta p}} \cdot \int_{p=-\infty}^{p=\infty} \mathrm{d}p \cdot \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{4(\Delta p)^2} - \frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0 + \frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t \right)\right)$$

schreiben. Dabei sind x_0 der Anfangsort, p_0 der Anfangsimpuls und Δp die (zeitunabhängige) Impulsunschärfe des Teilchens.

a) Man zeige, dass sich $|\Psi(x,t)|^2$ in der Form $|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_t}\exp\left(-\frac{\left(x - x_0 - \frac{p_0}{m}\right)}{2\delta_t^2} \right)$ mit

$\delta_t = \delta_0\sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\delta_0^4}}$ und $\delta_0 = \frac{\hbar}{2\Delta p} = (\Delta x)_0$ schreiben läßt und interpretiere dieses Ergebnis.

b) Man berechne den Erwartungswert $\langle X \rangle$ des Teilchenortes, sowie die Ortsunschärfe $(\Delta X) = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$. *(Lösung: $\langle X \rangle = x_0 + p_0/m$, $\Delta X = \delta_t$)*

c) Man zeige, dass $(\Delta X) \cdot (\Delta P) = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2(\Delta X)_0^4}} > \frac{\hbar}{2}$ für t > 0 und interpretiere dieses Ergebnis.