1. **Orts- und Impulsunschärfe eines Gauß-glockenförmigen Wellenpaketes:** Ein freies Teilchen kann als Gauß-glockenförmiges Wellenpaket dargestellt werden. Die Wellenfunktion als Funktion des Ortes x zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\delta_0}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\delta_0^2} + \frac{i}{\hbar} p_0 x\right).$$

a) Man zeige, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ für die Ortsunschärfe $(\Delta X)_0 = \sqrt{\langle X^2\rangle_0 - \langle X\rangle_0^2}$ gilt: $(\Delta X)_0 = \delta_0$.

b) Man zeige, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ für die Impulsunschärfe $(\Delta P)_0 = \sqrt{\langle P^2\rangle_0 - \langle P\rangle_0^2}$ gilt: $(\Delta P)_0 = \frac{\hbar}{2\delta_0}$.

c) Man berechne $(\Delta X)_0 \cdot (\Delta P)_0 = (\Delta X \cdot \Delta P)_{min}$.

<u>Hinweis</u> *zu* **a)** *und* **b)***:* $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. **Brechungsgesetz für Materiewellen:** Wenn **Elektronen** in einen Festkörper eindringen, so erfahren sie eine zusätzliche Beschleunigung durch einen inneren Potentialunterschied $\boldsymbol{U_i}$, der vom elektrostatischen Feld der Atomkerne und der Elektronen im Medium herrührt. Das bedeutet, dass die Materiewellenlänge $\boldsymbol{\lambda_2}$ der Elektronen im Medium sich von der Wellenlänge $\boldsymbol{\lambda_1}$ im Vakuum (oder Luft) unterscheidet.

a) Man berechne die **Wellenlängenänderung**. *(<u>Lösung</u>:* $\Delta\lambda = \frac{\mathrm{h}}{\sqrt{2m_e E}}\left(\frac{\sqrt{U+U_i} - \sqrt{U}}{\sqrt{U^2 + UU_i}}\right)$*)*

b) Aus der Wellenlängenänderung bestimme man den **Brechungsindex** $\boldsymbol{n}$ für Materiewellen. *(<u>Lösung</u>:* $n = \sqrt{1 + \frac{U_i}{U}}$ *)*

3. **Beugung von Materiewellen:** Elektronen der **kinetischen Energie** $\boldsymbol{E_{kin}}$ treffen auf einen **Spalt** der **Breite** $\boldsymbol{b}$:

a) Man berechne die größtmögliche **Spaltbreite** $\boldsymbol{b}$, bei der auf einem **Schirm** im **Abstand** $\boldsymbol{D}$ die **volle Fußpunktsbreite** $\boldsymbol{B}$ des **zentralen Beugungsmaximums außerhalb der Projektion des Spaltes** abgebildet wird. *(<u>Lösung</u>:* $b_{max} = \sqrt{\frac{2Dh}{\sqrt{2m_e E_{kin}}}}$ *)*

b) Wie groß ist die **volle Fußpunktsbreite** für das berechnete $\boldsymbol{d}$ für $\boldsymbol{D = 80}$ **cm** und $\boldsymbol{E_{kin} = 0{,}9}$ **keV**. *(Lösung:* $b_{max} = 8{,}09$ µm*)*

<u>Hinweis</u>*: Man gehe davon aus, dass das erste Beugungsminimum bei einem kleinen Winkel α erscheint.*

<u>Bitte Seite wenden!</u>

4. **Stationäre Zustände und Separation der Schrödingergleichung:** Man zeige allgemein, dass sich die Lösungsfunktion der zeitabhängigen Schrödingergleichung $\Psi(\vec{r},t)$ für das zeitlich konstante Potential $E_{\mathrm{pot}}(\vec{r})$ für einen **stationären Zustand** als Produkt $\Psi(\vec{r},t) = f(\vec{r})g(t)$ darstellen läßt. Man gebe die Gleichung für $f(\vec{r})$ für den eindimensionalen und den dreidimensionalen Fall an.

5. **Stationäre Zustände im unendlich hohen Kastenpotential:** Für ein **unendlich hohes Kastenpotential** der Form $E_{\mathrm{pot}}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,a] \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$ berechne man die **Wellenfunktionen und Energien der stationären Zustände**. Welche **laterale Ausdehnung** müsste dieses Potential haben, damit die **Grundzustandsenergie eines Elektrons im Kasten gleich der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms** (**13,6 eV**) ist? Was ist der wesentliche Unterschied zwischen den **Energien der stationären Zustände** im **Kastenpotential** und jenen im **Wasserstoffatom**?
(<u>Lösung</u>: $\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)$, $a = 1{,}66 \cdot 10^{-10}$ m*)*

6. **Erwartungswerte im Kastenpotential:** Mit Hilfe der **normierten Wellenfunktionen** $\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)$ für ein Teilchen im **unendlich hohen Kastenpotential** berechne man die **Erwartungswerte** $\langle X \rangle$, $\langle P \rangle$ und $\langle P^2 \rangle$. Man kommentiere die Ergebnisse.

(<u>Lösung</u>: $\langle X \rangle = \frac{a}{2}$, $\langle P \rangle = 0$, $\langle P^2 \rangle = \left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2$ *)*

c) Man zeige, dass $(\Delta X) \cdot (\Delta P) = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2(\Delta X)_0^4}} > \frac{\hbar}{2}$ für t > 0 und interpretiere dieses Ergebnis.