

- 1. Bohrsches Magneton:** Mit Hilfe des **Bohrschen Atommodells** berechne man das **magnetische Bahnmoment p_m eines Elektrons** im **Grundzustand** des Wasserstoffatoms. Unter der Annahme, dass die Kernmasse unendlich groß ist, wird diese Größe als *Bohrsches Magneton* bezeichnet. (Lösung: $\mu_B = 1,166 \cdot 10^{-29}$ Vs oder $\mu_B = 9,282 \cdot 10^{-24}$ Am²)

- 2. Flächen- und Volumenelemente krummliniger Koordinatensysteme:** Man skizziere und gebe die mathematische Form der Flächen- und Volumenelemente der folgenden krummlinigen Koordinatensysteme an.

- a) **Polarkoordinaten** (r, φ) . (Lösung: $dF = r \cdot dr \cdot d\varphi$)
 b) **Zylinderkoordinaten** (r, φ, z) . (Lösung: $dV = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz$)
 c) **Kugelkoordinaten** (r, ϑ, φ) . (Lösung: $dV = r^2 \cdot dr \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$)

- 3. Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinatensystemen:** Differentialoperatoren in **krummlinigen Koordinatensystemen** können mittels des sogenannten **metrischen Tensors** bestimmt werden. In drei Dimensionen gilt für die Elemente des metrischen Tensors die Beziehung $T_{ij}^2 = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j}$. Dabei sind die x_i z. B. die kartesischen Koordinaten x, y, z und die \bar{x}_i z. B. die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ . Es gilt: $x_i = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

- a) Man zeige, dass T_{ij} für Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten nur Diagonalelemente besitzt.
 b) Man bestimme den Laplace-Operator Δ in Kugel- und Zylinderkoordinaten gemäß der Beziehung

$$\Delta = \frac{1}{T_{11}T_{22}T_{33}} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(\frac{T_{22}T_{33}}{T_{11}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left(\frac{T_{11}T_{33}}{T_{22}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left(\frac{T_{11}T_{22}}{T_{33}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \right) \right]$$

(Lösung: Kugelkoordinaten: $\Delta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$)

Zylinderkoordinaten: $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$)

- 4. Erwartungswerte der Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms:** Man bestimme die Erwartungswerte $\langle r \rangle$ der **Abstände eines Elektrons vom Kern eines Wasserstoffatoms** für

- a) den σ_{1s} - Zustand, (Lösung: $\langle r \rangle = (3/2)a_0$)
 b) den σ_{2s} - Zustand, (Lösung: $\langle r \rangle = 6a_0$)
 c) den σ_{2p} - Zustand, (Lösung: $\langle r \rangle = 5a_0$)
 d) den π_{2p} - Zustand (Lösung: $\langle r \rangle = 5a_0$)

und setze diese in Relation zum **ersten Bohrschen Radius a_0** .