

Institut f. Angewandte Physik
UE Grundlagen der Physik III WS 2013/14

9. Übung am 19. 12. 2013

35) Wasserstoffatom:

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung die Wellenfunktion und die Energie für den Grundzustand des Wasserstoffatoms (1s-Zustand) unter der Annahme, dass $\psi(r)$ Kugelsymmetrie hat.

Dann wird :
$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\psi}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \cdot \psi = 0$$

wobei gilt:
$$V(r) = -\frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

b) Normieren Sie die Lösung.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W das Elektron außerhalb des Bohrradius a_0 , d.h. im Bereich $r > a_0$, zu finden.

Integrationsstrick:
$$\int r^n e^{-\beta r} dr = (-\partial/\partial\beta)^n \int e^{-\beta r} dr = (-\partial/\partial\beta)^n (-e^{-\beta r}/\beta)$$

(2 Pkte)

36) Wasserstoffatom:

Berechnen Sie den Erwartungswert der Gesamtenergie

$$\langle H \rangle = \left\langle -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\rangle$$

des **3s** und des **2p** Zustandes und ermitteln Sie daraus die Wellenlänge des emittierten Lichtes beim Übergang zwischen diesen beiden Zuständen. Verwenden Sie dazu die in Demtröder III Tab 4.2, 5.1 und 5.2 gegebenen Funktionen (beigefügt!).

(Es gilt:
$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cdot x^n \cdot dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}})$$

(3 Pkte)

37) Wasserstoffatom:

a) Ein Elektron befinde sich im Quantenzustand $\ell=1, m=1$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W , das Elektron im Winkelbereich $\vartheta = 90^\circ \pm 5^\circ$ anzutreffen.

b) Ein Elektron befinde sich im Quantenzustand $\ell=3, m=0$. Bestimmen Sie die Extremwerte der Winkelverteilung (kleinste und größte Aufenthaltswahrscheinlichkeiten).

(3 Pkte)

38) Wasserstoffatom:

Wo liegt das Maximum der radialen Wahrscheinlichkeitsdichte für den 3p-Zustand im H-Atom?

(2 Pkte)

Tabelle 5.1. Die normierten radialen Eigenfunktionen $R(r)$ (**Laguerre-Polynome**) für ein Elektron im Coulomb-Potential ($N = (Z/na_0)^{3/2}$, $x = Zr/na_0$, $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/\mu e^2$)

n	l	$R_{n,l}(r)$
1	0	$2Ne^{-x}$
2	0	$2Ne^{-x}(1-x)$
2	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}Ne^{-x}x$
3	0	$2Ne^{-x}\left(1-2x+\frac{2x^2}{3}\right)$
3	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}Ne^{-x}x(2-x)$
3	2	$\frac{4}{3\sqrt{10}}Ne^{-x}x^2$
4	0	$2Ne^{-x}\left(1-3x+2x^2-\frac{x^3}{3}\right)$
4	1	$2\sqrt{\frac{5}{3}}Ne^{-x}x\left(1-x+\frac{x^2}{5}\right)$
4	2	$2\sqrt{\frac{1}{5}}Ne^{-x}x^2\left(1-\frac{x}{3}\right)$
4	3	$\frac{2}{3\sqrt{35}}Ne^{-x}x^3$

Tabelle 5.2. Die normierten vollständigen Eigenfunktionen eines Elektrons im Coulombpotential $V(r) = -Z \cdot e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$

n	l	m	Eigenfunktionen $\psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi)$
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}e^{-Zr/a_0}$
2	0	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(2-\frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}$
2	1	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\cos\vartheta$
2	1	± 1	$\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$
3	0	0	$\frac{1}{81\sqrt{3\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(27-18\frac{Zr}{a_0}+2\frac{Z^2r^2}{a_0^2}\right)e^{-Zr/3a_0}$
3	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(6-\frac{Zr}{a_0}\right)\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/3a_0}\cos\vartheta$
3	1	± 1	$\frac{1}{\sqrt{81\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(6-\frac{Zr}{a_0}\right)\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/3a_0}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$
3	2	0	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Z^2r^2}{a_0^2}e^{-Zr/3a_0}(3\cos^2\vartheta-1)$
3	2	± 1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Z^2r^2}{a_0^2}e^{-Zr/3a_0}\sin\vartheta\cos\vartheta e^{\pm i\varphi}$
3	2	± 2	$\frac{1}{162\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Z^2r^2}{a_0^2}e^{-Zr/3a_0}\sin^2\vartheta e^{\pm 2i\varphi}$

Tabelle 4.2. Kugelflächenfunktionen

l	m	Y_l^m
0	0	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
1	± 1	$\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$
	0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\vartheta$
2	± 2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\vartheta e^{\pm 2i\varphi}$
	± 1	$\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cos\vartheta\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$
	0	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\vartheta-1)$
3	± 3	$\mp\frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}\sin^3\vartheta e^{\pm 3i\varphi}$
	± 2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\cos\vartheta\sin^2\vartheta e^{\pm 2i\varphi}$
	± 1	$\mp\frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}}\sin\vartheta(5\cos^2\vartheta-1)e^{\pm i\varphi}$
	0	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}}(5\cos^3\vartheta-3\cos\vartheta)$