1. **Rotverschiebung im Gravitationsfeld:** Das Spektrometer eines Raumfahrzeuges detektiert im Licht, welches von einem Stern ausgeht, die **relative Frequenzverschiebung der Wasserstoff-H_α-Line** $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_0 - \nu_G}{\nu_0} = 9 \cdot 10^{-7}$. Der **Radius des Sternes** konnte mittels geometrischer Messungen bestimmt werden und beträgt **900000 km**.

➔ Wie groß ist seine **Masse**? *(Lösung:* $1{,}09 \cdot 10^{30}$ kg*)*

2. **Materiewellen**: Man bestimme die **De-Broglie-Wellenlänge** von

a) einem **Elektron** mit der kinetischen Energie $\boldsymbol{E_{kin} = 1}$ **eV**, *(Lösung:* $\lambda = 1{,}23$ nm*)*
b) einem **Elektron** mit der kinetischen Energie $\boldsymbol{E_{kin} = 100}$ **keV**, *(Lösung:* $\lambda = 0{,}0037$ nm*)*
c) einem **C_{60}-Molekül** mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v = 10}$ **cms^{-1}**, *(Lösung:* $\lambda = 5{,}52$ nm*)*
d) einem Molekül der Verbindung **$C_{48}H_{24}F_{51}P$** mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v = 10^3}$ **ms^{-1}**.
(Lösung: $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ m*)*
d) einem **Auto** mit **2000 kg** Masse, welches sich mit **60 kmh^{-1}** bewegt. *(Lösung:* $\lambda = 1{,}99 \cdot 10^{-38}$ m*)*
f) Wie schnell muß dich ein Mensch ($\boldsymbol{m = 80}$ **kg**) bewegen, damit seine Materiewellenlänge der **Planck-Länge** entspricht? *(Lösung:* $v = 0{,}51$ m/s*)*

3. **Materiewellen, Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit:** Man bestimme

a) die **Phasengeschwindigkeit v_{Ph}** einer ebenen Materiewelle, *(Lösung:* $v_{Ph} = \frac{\hbar k}{2m}$*)*
b) die **Gruppengeschwindigkeit v_g** eines Materiewellenpaketes. *(Lösung:* $v_g = \frac{\hbar k}{m}$*)*
c) Wie hängen die Phasengeschwindigkeit **v_{Ph}**, die Gruppengeschwindigkeit **v_g** und die Teilchengeschwindigkeit **v_T** für ein Teilchen mit **gegebenem Impuls p** und **gegebener kinetischer Energie E_{kin}** zusammen? *(Lösung:* $v_g = 2v_{Ph} = v_T$*)*

4. **Beugung von Materiewellen:** Elektronen der **kinetischen Energie E_{kin}** treffen auf einen **Spalt** der **Breite b**:

a) Man berechne die größtmögliche **Spaltbreite b**, bei der auf einem **Schirm** im **Abstand D** die **volle Fußpunktsbreite B** des **zentralen Beugungsmaximums außerhalb der Projektion des Spaltes** abgebildet wird. *(Lösung:* $b_{max} = \sqrt{\frac{2Dh}{\sqrt{2m_e E_{kin}}}}$*)*

b) Wie groß ist die **volle Fußpunktsbreite** für das berechnete $\boldsymbol{d}$ für $\boldsymbol{D = 80}$ **cm** und $\boldsymbol{E_{kin} = 0{,}9}$ **keV**.
(Lösung: $b_{max} = 8{,}09$ µm*)*

Hinweis: Volle Fußpunktsbreite: Distanz zwischen erstem linken und erstem rechten Beugungsminimum. Man gehe davon aus, dass das erste Beugungsminimum bei einem kleinen Winkel α erscheint.

Bitte Seite wenden!

5. **Fourier-Integral der Gaußschen Glockenkurve:** In vielen Bereichen der Physik spielt die Fourier-Transformierte der Gaußschen Glockenkurve eine große Rolle. Man bilde diese gemäß $\tilde{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma}\right)\exp(-ikx)\mathrm{d}x$. Man zeige, dass $\left|\tilde{F}(k)\right|^2$ auch die Form einer Gaußschen Glockenfunktion besitzt. *(<u>Lösung</u>:* $\left|\tilde{F}(k)\right|^2 = \pi\sigma\exp\left(-\frac{\sigma k^2}{2}\right)$*)*

<u>Hinweis</u>: Man ergänze das Argument der Exponentialfunktion zu einem vollständigen Quadrat.

6. **Zeitabhängiges Unschärfeprodukt – „Zerfliessen" eines Gauß-glockenförmigen Wellenpaketes:** Die zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung für ein **freies Teilchen** läßt sich in der Form

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\Delta p}} \cdot \int_{p=-\infty}^{p=\infty} \mathrm{d}p \cdot \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{4(\Delta p)^2} - \frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0 + \frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right)$$

schreiben. Dabei sind x_0 der Anfangsort, p_0 der Anfangsimpuls und Δp die (zeitunabhängige) Impulsunschärfe des Teilchens.

a) Man zeige, dass sich $\left|\Psi(x,t)\right|^2$ in der Form $\left|\Psi(x,t)\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_t}\exp\left(-\frac{\left(x - x_0 - \frac{p_0}{m}\cdot t\right)^2}{2\delta_t^2}\right)$ mit

$\delta_t = \delta_0\sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\delta_0^4}}$ und $\delta_0 = \frac{\hbar}{2\Delta p} = (\Delta x)_0$ schreiben läßt und interpretiere dieses Ergebnis.

b) Man berechne den Erwartungswert $\langle X \rangle$ des Teilchenortes, sowie die Ortsunschärfe $(\Delta X) = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$. *(<u>Lösung</u>:* $\langle X \rangle = x_0 + p_0/m$, $\Delta X = \delta_t$*)*

c) Man zeige, dass $(\Delta X) \cdot (\Delta P) = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2(\Delta X)_0^4}} > \frac{\hbar}{2}$ für t > 0 und interpretiere dieses Ergebnis.