1. **Zeitabhängiges Unschärfeprodukt – „Zerfliessen" eines Gauß-glockenförmigen Wellenpaketes:** Die zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung für ein **freies Teilchen** läßt sich in der Form

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\Delta p}}\cdot\int_{p=-\infty}^{p=\infty}\mathrm{d}p\cdot\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{4(\Delta p)^2}-\frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0+\frac{i}{\hbar}\left(px-\frac{p^2}{2m}t\right)\right)$$

schreiben. Dabei sind x_0 der Anfangsort, p_0 der Anfangsimpuls und Δp die (zeitunabhängige) Impulsunschärfe des Teilchens.

a) Man zeige, dass sich $|\Psi(x,t)|^2$ in der Form $|\Psi(x,t)|^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_t}\exp\left(-\frac{\left(x-x_0-\frac{p_0}{m}\cdot t\right)^2}{2\delta_t^2}\right)$ mit

$\delta_t=\delta_0\sqrt{1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2\delta_0^4}}$ und $\delta_0=\frac{\hbar}{2\Delta p}=(\Delta x)_0$ schreiben läßt und interpretiere dieses Ergebnis.

b) Man berechne den Erwartungswert $\langle X\rangle$ des Teilchenortes, sowie die Ortsunschärfe $(\Delta X)=\sqrt{\langle X^2\rangle-\langle X\rangle^2}$. *(Lösung: $\langle X\rangle=x_0+p_0/m$, $\Delta X=\delta_t$)*

c) Man zeige, dass $(\Delta X)\cdot(\Delta P)=\frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2(\Delta X)_0^4}}>\frac{\hbar}{2}$ für t > 0 und interpretiere dieses Ergebnis.

2. **Eindringen eines Teilchens in eine Potentialwand:** Ein Teilchen der **Masse *m*** und der **kinetischen Energie E_{kin}** befinde sich in einem eindimensionalen Kastenpotential der Form $E_{\text{pot}}(x)=\begin{cases}0 \text{ für } 0\le x\le a\\ E_0 \text{ sonst}\end{cases}$.

➔ Wie groß ist die Eindringtiefe δ des Teilchens in die Potentialwände, bei der die **Aufenthaltswahrscheinlichkeit** auf **50 %** gesunken ist?

➔ Man berechne diese Eindringtiefe für

a) für E_0 **= 100 eV** und ein Elektron mit E_{kin} **= 10 eV** *(Lösung:* δ = 7,14 · 10^{-12} m*)*
b) für E_0 **= 100 eV** und ein Elektron mit E_{kin} **= 90 eV** *(Lösung:* δ = 2,14 · 10^{-11} m*)*
c) für E_0 **= 1 eV** und ein Elektron mit E_{kin} **= 0,5 eV** *(Lösung:* δ = 9,58 · 10^{-11} m*)*

3. **Potentialwall und Tunneleffekt in einer Dimension:** Ein Teilchen der **Masse *m*** und der Energie ***E*** trifft **von links** auf einen **Potentialwall** der **Höhe E_0** ($E_0 > E$) und der **Breite *a***. Der Anfangspunkt des Walles liege bei ***x* = 0**.

➔ Man berechne den **Reflexionskoeffizienten *R*** und den **Tansmissionskoeffizienten *T*** der Wellenfunktion.
➔ Man zeige, dass ***T* + *R* = 1**.
➔ Warum können zur Berechnung des Problems ebene Wellen verwendet werden, obwohl **freie Teilchen** eigentlich durch **Wellenpakete** beschrieben werden müssen?

(Lösung: $T=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{E_0^2}{E(E_0-E)}\sinh^2\left(a\cdot\sqrt{\frac{2m(E_0-E)}{\hbar^2}}\right)+1\right)^{-1}$ *)*

4. **Stationäre Zustände und Separation der Schrödingergleichung:** Man zeige allgemein, dass sich die Lösungsfunktion der zeitabhängigen Schrödingergleichung $\Psi(\vec r,t)$ für das zeitlich konstante Potential $E_{\text{pot}}(\vec r)$ für einen **stationären Zustand** als Produkt $\Psi(\vec r,t)=f(\vec r)g(t)$ darstellen läßt. Man gebe die Gleichung für $f(\vec r)$ für den eindimensionalen und den dreidimensionalen Fall an.