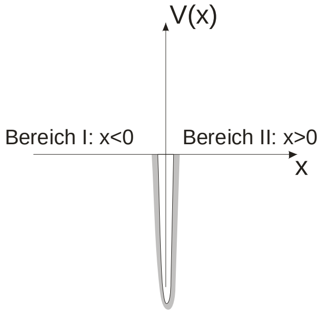
1. **Delta-Potential:** Ein Teilchen der **Masse *m*** befinde sich in einem **anziehenden δ-förmigen** Potential der Form $V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \cdot D \cdot \delta(x), \quad D > 0$ (siehe Skizze).



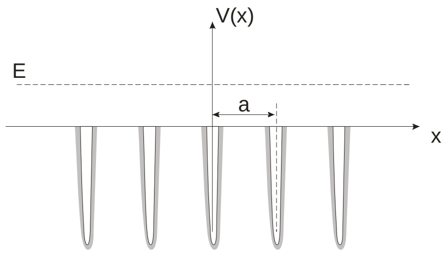
a) Zeigen Sie mit Hilfe der **einmaligen Integration der zeitunabhängigen Schrödingergleichung** über das **Intervall [*x* = -ε, *x* = ε]**, dass für $\varepsilon \to 0$ die Anschlussbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion von Bereich *I* zu Bereich *II* (siehe Skizze) lautet: $\frac{d\psi_I(x)}{dx} = \frac{d\psi_{II}(x)}{dx} + 2 \cdot D \cdot \psi(0)$.

Beachten Sie dabei: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} E \cdot \psi(x) \cdot dx = 0$ und $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) \cdot \psi(x) = \psi(0)$.

b) Zeigen Sie, dass es **nur einen gebundenen Zustand** der Energie $E = -\frac{\hbar^2 \cdot D^2}{2 \cdot m}$ gibt.

c) Bestimmen Sie die **normierte Wellenfunktion** zu diesem Eigenwert.

2. **Periodisches δ-Potential und Bändermodell:** Ein Teilchen der **Masse *m*** und der **Energie *E*, *E* > 0**, befinde sich in Wechselwirkung mit einem **anziehenden periodischen δ-förmigen Potential** der Form $V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \cdot D \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x + l \cdot a), \quad D > 0$, mit der **Gitterkonstante *a* > 0** (siehe Skizze).



Das **Blochtheorem**, welches für **periodische Potentiale** gilt, besagt, dass die Energieeigenfunktionen eines Teilchens durch einen **kontinuierlichen Parameter *K***, $K \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$, die sogenannte **Quasiwellenzahl**, gekennzeichnet werden können. Für die zu einem gegebenen K gehörige Energieeigenfunktion gilt $\psi_K(x + l \cdot a) = e^{i \cdot K \cdot l \cdot a} \cdot \psi_K(x), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Leiten Sie mit Hilfe der **Anschlussbedingung für die Ableitung** der Wellenfunktionen von links nach rechts eines δ-Potentiales **an der Stelle *a***, $\left.\frac{d\psi_{links}(x)}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d\psi_{rechts}(x)}{dx}\right|_{x=a} + 2 \cdot D \cdot \psi(a)$ sowie mit Hilfe des Blochtheorems die **Eigenwertbedingung für die möglichen Energiewerte *E* des Teilchens her** und erläutern Sie, warum es zum Auftreten von "erlaubten" und "verbotenen" Energiebereichen, den sogenannten **Energiebändern**, kommt.

(<u>Lösung</u>: $\cos(K \cdot a) = \cos\left(\sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot E}{\hbar^2}} \cdot a\right) - \frac{D}{\sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot E}{\hbar^2}}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot E}{\hbar^2}} \cdot a\right)$*)*

<u>Bitte Seite wenden!</u>

3. Dichte von Kernmaterie:

a) Wieviele **g** hat ein **cm³ Kernmaterie**, wenn man davon ausgeht, dass ein **Nukleon** einen **Durchmesser von 1 fm** hat und eine **Masse von 1 u** besitzt. Man vergleiche diesen Wert mit der **Dichte** von **Wasser** und von **Gold**. *(Lösung:* $\rho = 1{,}66$ Gt/cm³*)*
Hinweis: Das Nukleon kann als würfelförmig betrachtet werden.

b) Berechnen Sie die **Fluchtgeschwindigkeit** $\boldsymbol{v}$ von einem Neutronenstern mit einer Dichte von ρ **= 1,66 Gt/cm³** und einem Radius $\boldsymbol{R}$ **= 10 km**. *(Lösung:* $v = 0.75 \cdot c$*)*

4. Alpha-Zerfall:

Alpha-Zerfall: Man berechne die **Zerfallskonstante** λ, sowie die **Halbwertszeit** $\boldsymbol{t_{1/2}}$ eines α-Strahlers.

a) Zunächst allgemein mit Hilfe der folgenden **Modellannahmen für das Kernpotential** und den **Coulomb-Wall**:
Kernpotential: Kastenpotential der Tiefe $-E_1$ und Breite a;
Coulomb-Wall: Potentialschwelle der Höhe $+E_2$ und Breite b;
Energie des α-Teilchens: $+E_3$.
(Lösung: $\lambda = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2(E_1+E_3)}{m}} \cdot \frac{16E_3}{E_2^2}(E_2-E_3)\exp\left[-\frac{2b}{\hbar}\sqrt{2m(E_2-E_3)}\right]$*)*

b) Mit folgenden **Zahlenwerten**:
Kernpotential: $E_1 = +15$ MeV, $a = 6 \cdot 10^{-15}$ m
Coulomb-Wall: $E_2 = +11$ MeV, $b = 4 \cdot 10^{-14}$ m
Energie des α-Teilchens: $E_3 = +6$ MeV
(Lösung: $t_{1/2} \cong 10^4$ a *)*

c) Leiten Sie eine allgemeine Beziehung für **die Änderung der Halbwertszeit** $\boldsymbol{t_{1/2}}$ **in Abhängigkeit von der Breite** $\boldsymbol{b}$ **des Coulomb-Walles** ab und diskutieren Sie die Konsequenzen für die Halbwertszeiten von α-Strahlern.