1. **Zeitabhängiges Unschärfeprodukt – „Zerfliessen“ eines Gauß-glockenförmigen Wellenpaketes:** Die zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung für ein **freies Teilchen** läßt sich in der Form

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\Delta p}}\cdot\int_{p=-\infty}^{p=\infty}\mathrm{d}p\cdot\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{4(\Delta p)^2}-\frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0+\frac{i}{\hbar}\left(px-\frac{p^2}{2m}t\right)\right)$$

schreiben. Dabei sind x_0 der Anfangsort, p_0 der Anfangsimpuls und Δp die (zeitunabhängige) Impulsunschärfe des Teilchens.

a) Man zeige, dass sich $|\Psi(x,t)|^2$ in der Form $|\Psi(x,t)|^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_t}\exp\left(-\frac{\left(x-x_0-\frac{p_0}{m}\cdot t\right)^2}{2\delta_t^2}\right)$ mit

$\delta_t=\delta_0\sqrt{1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2\delta_0^4}}$ und $\delta_0=\frac{\hbar}{2\Delta p}=(\Delta x)_0$ schreiben läßt und interpretiere dieses Ergebnis.

b) Man berechne den Erwartungswert $\langle X\rangle$ des Teilchenortes, sowie die Ortsunschärfe $(\Delta X)=\sqrt{\langle X^2\rangle-\langle X\rangle^2}$. *(<u>Lösung</u>: $\langle X\rangle=x_0+p_0/m$, $\Delta X=\delta_t$)*

c) Man zeige, dass $(\Delta X)\cdot(\Delta P)=\frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2(\Delta X)_0^4}}>\frac{\hbar}{2}$ für t > 0 und interpretiere dieses Ergebnis.

2. **Eindringen eines Teilchens in eine Potentialwand:** Ein Teilchen der **Masse *m*** und der **kinetischen Energie *E*$_{\text{kin}}$** befinde sich in einem eindimensionalen Kastenpotential der Form $E_{\text{pot}}(x)=\begin{cases}0 \text{ für } 0\le x\le a\\ E_0 \text{ sonst}\end{cases}$.

➔ Wie groß ist die Eindringtiefe δ des Teilchens in die Potentialwände, bei der die **Aufenthaltswahrscheinlichkeit** auf **50 %** gesunken ist?

➔ Man berechne diese Eindringtiefe für

a) für **E_0 = 100 eV** und ein Elektron mit **E_{kin} = 10 eV** *(<u>Lösung</u>: $\delta = 7{,}14\cdot10^{-12}$ m)*
b) für **E_0 = 100 eV** und ein Elektron mit **E_{kin} = 90 eV** *(<u>Lösung</u>: $\delta = 2{,}14\cdot10^{-11}$ m)*
c) für **E_0 = 1 eV** und ein Elektron mit **E_{kin} = 0,5 eV** *(<u>Lösung</u>: $\delta = 9{,}58\cdot10^{-11}$ m)*

3. **Stationäre Zustände und Erwartungswerte im unendlich hohen Kastenpotential:** Für ein **unendlich hohes Kastenpotential** der Form $E_{\text{pot}}(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,a]\\ \infty & \text{sonst}\end{cases}$ berechne man die **Wellenfunktionen und Energien der stationären Zustände**. Welche **laterale Ausdehnung** müsste dieses Potential haben, damit die **Grundzustandsenergie eines Elektrons im Kasten gleich der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms** (**13,6 eV**) ist? Weiters berechne man für ein Teilchen im **unendlich hohen Kastenpotential** die **Erwartungswerte** $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$ und $\langle P^2\rangle$ und kommentiere die Ergebnisse. *(<u>Lösung</u>: $\Psi_n(x,t)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)$, $a = 1{,}66\cdot10^{-10}$ m, $\langle X\rangle=\frac{a}{2}$, $\langle P\rangle=0$, $\langle P^2\rangle=\left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2$)*

4. **Potentialtopf in einer Dimension:** Man zeige, dass für die Reflexion bzw. Transmission eines freien Teilchens der Energie $E > 0$, welches **einen Potentialtopf der Breite *a* und der Tiefe -*E*$_0$ von links kommend überquert** (der Anfangspunkt des Topfes liege bei ***x* = 0**), analoge Beziehungen wie für das **Durchtunneln** eines Potentialwalles gelten. *(<u>Lösung</u>: $T=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{E_0^2}{E(E-E_0)}\sin^2\left(a\cdot\sqrt{\frac{2m(E-E_0)}{\hbar^2}}\right)+1\right)^{-1}$)*