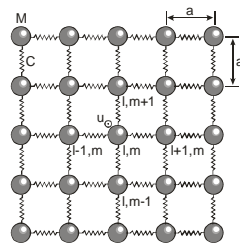


1. Kristallographie: Ein kristalliner Festkörper kann als **periodische Anordnung von Atomen** beschrieben werden. Alle Atompositionen lassen sich durch **Translation der sogenannten Elementarzelle** in die drei Raumrichtungen um einen Satz von **Basisvektoren** konstruieren.

- a) Interpretieren Sie die Termini **Elementarzelle**, **primitive Elementarzelle**, **Basisvektor**, **primitiver Basisvektor** und **reziprokes Gitter**.
- b) Skizzieren Sie eine **Elementarzelle** eines **kubisch raumzentrierten** und eines **kubisch flächenzentrierten** Gitters. Ermitteln Sie die **primitiven Basisvektoren**.
- c) Zeigen Sie, dass das **reziproke Gitter** des **kubisch flächenzentrierten Gitters** **kubisch raumzentriert** ist.

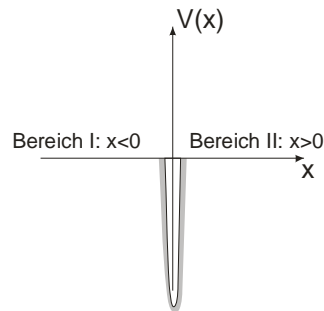
2. Schwingungen im quadratischen Gitter – Dispersionsrelation, Brillouin-Zone und Schallgeschwindigkeit: Gegeben sei ein quadratisches Gitter der **Gitterkonstante a** . $u_{l,m}$ sei die Auslenkung des Atomes in der **Spalte l** und der **Reihe m** . Die Auslenkungen u seien alle **normal** zur eingezeichneten Ebene (siehe Skizze). Die **Masse der Atome** sei M , die **Federkonstante** zwischen den nächsten Nachbaratomen sei C .



- a) Zeigen Sie, dass für **kleine Auslenkungen u** die Bewegungsgleichung des Atomes an der Position l, m folgendermaßen lautet:
$$M \cdot \frac{d^2 u_{l,m}}{dt^2} = C \cdot [(u_{l+1,m} + u_{l-1,m} - 2 \cdot u_{l,m}) + (u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 2 \cdot u_{l,m})]$$
- b) Zeigen Sie, dass mit $u_{l,m} = u(0) \cdot \exp[i \cdot (l \cdot k_x \cdot a + m \cdot k_y \cdot a - \omega \cdot t)]$ die Bewegungsgleichung erfüllt ist, wenn die Dispersionsrelation $\omega^2 \cdot M = 2 \cdot C \cdot [2 - \cos(k_x \cdot a) - \cos(k_y \cdot a)]$ gilt.
- c) Bestimmen Sie jenen Bereich des k -Raumes, für den **unabhängige Lösungen** der Dispersionsrelation existieren.
- d) Zeigen Sie, dass für $k_x \cdot a \ll 1$ und $k_y \cdot a \ll 1$ gilt: $\omega = \sqrt{\frac{C \cdot a^2}{M}} \cdot \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\frac{C \cdot a^2}{M}} \cdot K$. Wie hängt dieses Ergebnis mit der **Schallgeschwindigkeit** in Festkörpern zusammen?

Bitte Seite wenden!

- 3. Delta-Potential:** Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem **anziehenden δ -förmigen** Potential der Form $V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \cdot D \cdot \delta(x)$, $D > 0$ (siehe Skizze).

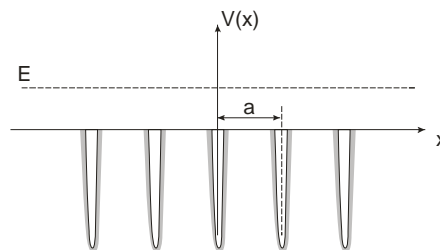


- a) Zeigen Sie mit Hilfe der **einmaligen Integration der zeitunabhängigen Schrödingergleichung** über das **Intervall** $[x = -\epsilon, x = \epsilon]$, dass für $\epsilon \rightarrow 0$ die Anschlussbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion von Bereich I zu Bereich II (siehe Skizze) lautet: $\frac{d\psi_I(x)}{dx} = \frac{d\psi_{II}(x)}{dx} + 2 \cdot D \cdot \psi(0)$.

Beachten Sie dabei: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} E \cdot \psi(x) \cdot dx = 0$ und $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) \cdot \psi(x) = \psi(0)$.

- b) Zeigen Sie, dass es **nur einen gebundenen Zustand** der Energie $E = -\frac{\hbar^2 \cdot D^2}{2 \cdot m}$ gibt.
 c) Bestimmen Sie die **normierte Wellenfunktion** zu diesem Eigenwert.

- 4. Periodisches δ -Potential und Bändermodell:** Ein Teilchen der Masse m und der Energie E , $E > 0$, befinde sich in Wechselwirkung mit einem **anziehenden periodischen δ -förmigen** Potential der Form $V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} \cdot D \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x + l \cdot a)$, $D > 0$, mit der **Gitterkonstante** $a > 0$ (siehe Skizze).



Das **Blochtheorem**, welches für **periodische Potentiale** gilt, besagt, dass die Energieeigenfunktionen eines Teilchens durch einen **kontinuierlichen Parameter** K , $K \in \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right]$, die sogenannte **Quasiwellenzahl**, gekennzeichnet werden können. Für die zu einem gegebenen K gehörige Energieeigenfunktion gilt $\psi_K(x + l \cdot a) = e^{i \cdot K \cdot l \cdot a} \cdot \psi_K(x)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Leiten Sie mit Hilfe der **Anschlussbedingung für die Ableitung** der Wellenfunktionen von links nach rechts eines δ -Potentials **an der Stelle a** , $\frac{d\psi_{links}(x)}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{d\psi_{rechts}(x)}{dx} \Big|_{x=a} + 2 \cdot D \cdot \psi(a)$ sowie mit Hilfe des Blochtheorems die **Eigenwertbedingung für die möglichen Energiewerte E des Teilchens her** und erläutern Sie, warum es zum Auftreten von "erlaubten" und "verbotenen" Energiebereichen, den sogenannten **Energiebändern**, kommt.

(Lösung: $\cos(K \cdot a) = \cos\left(\sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot E}{\hbar^2}} \cdot a\right) - \frac{D}{\sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot E}{\hbar^2}}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot E}{\hbar^2}} \cdot a\right)$)