

1. **Relativistische Phasen- und Gruppengeschwindigkeit:** Man zeige mit Hilfe der relativistischen Energieinvarianten, $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$, sowie mit der Beziehung $E = \hbar \omega$, dass die Beziehung $v_g v_\phi = c^2$ in jedem Fall gilt.

2. **Zeitabhängiges Unschärfeprodukt – „Zerfließen“ eines Gauß-glockenförmigen Wellenpaketes:** Die zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung für ein **freies Teilchen** läßt sich in der Form

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\Delta p}} \cdot \int_{p=-\infty}^{p=\infty} dp \cdot \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{4(\Delta p)^2} - \frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0 + \frac{i}{\hbar}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right)$$

schreiben. Dabei sind x_0 der Anfangsort, p_0 der Anfangsimpuls und Δp die (zeitunabhängige) Impulsunschärfe des Teilchens.

- a) Man zeige, dass sich $|\Psi(x,t)|^2$ in der Form $|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_t} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0 - \frac{p_0}{m} \cdot t\right)^2}{2\delta_t^2}\right)$ mit

$$\delta_t = \delta_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \delta_0^4}} \text{ und } \delta_0 = \frac{\hbar}{2\Delta p} = (\Delta x)_0 \text{ schreiben läßt und interpretiere dieses Ergebnis.}$$

- b) Man berechne den Erwartungswert $\langle X \rangle$ des Teilchenortes, sowie die Ortsunschärfe $(\Delta x) = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$. (Lösung: $\langle X \rangle = x_0 + t \cdot p_0/m$, $\Delta x = \delta_t$)

- c) Man zeige, dass $(\Delta x) \cdot (\Delta p) = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 (\Delta x)_0^4}} > \frac{\hbar}{2}$ für $t > 0$ und interpretiere dieses Ergebnis.

3. **Eindringen eines Teilchens in eine Potentialwand:** Ein Teilchen der **Masse m** und der **kinetischen Energie E_{kin}** befinde sich in einem eindimensionalen Kastenpotential der Form

$$E_{\text{pot}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ E_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ Wie groß ist die Eindringtiefe δ des Teilchens in die Potentialwände, bei der die **Aufenthaltswahrscheinlichkeit** auf **50 %** gesunken ist?

→ Man berechne diese Eindringtiefe für

- a) für $E_0 = 100 \text{ eV}$ und ein Elektron mit $E_{\text{kin}} = 10 \text{ eV}$ (Lösung: $\delta = 7,14 \cdot 10^{-12} \text{ m}$)
 b) für $E_0 = 100 \text{ eV}$ und ein Elektron mit $E_{\text{kin}} = 90 \text{ eV}$ (Lösung: $\delta = 2,14 \cdot 10^{-11} \text{ m}$)
 c) für $E_0 = 1 \text{ eV}$ und ein Elektron mit $E_{\text{kin}} = 0,5 \text{ eV}$ (Lösung: $\delta = 9,58 \cdot 10^{-11} \text{ m}$)

Bitte Seite wenden!

- 4. Anwendung des quantenmechanischen Tunneleffektes – das Rastertunnelmikroskop:** Man bestimme die **radiale Verteilung des Tunnelstromes $j(r)$** von der **Oberfläche einer metallischen Probe zur Spitze eines Rastertunnelmikroskops**. Aus der Radialverteilung des Tunnelstromes bestimme man weiters die **laterale Auflösung σ** des Tunnelmikroskops. Die **Geometrie der Spitze** entspreche einem **Rotationsparaboloid**, welches durch die Gleichung $z(r) = \frac{r^2}{2R}$ gegeben ist. Der **Radius der Spitzenverrundung** sei $R = 100 \text{ nm}$, die **Austrittsarbeit** des Metalls betrage $W_a = 4 \text{ eV}$.
(Lösung: $\sigma = 2,2 \text{ nm}$)

Hinweis: Man verwende die Näherung des Transmissionskoeffizienten für den Tunneleffekt für große Argumente von $\sinh(x)$.

- 5. Stationäre Zustände im unendlich hohen Kastenpotential:** Für ein **unendlich hohes Kastenpotential** der Form $E_{\text{pot}}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, a] \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$ berechne man die **Wellenfunktionen und Energien der stationären Zustände**. Welche **laterale Ausdehnung** müsste dieses Potential haben, damit die **Grundzustandsenergie eines Elektrons im Kasten gleich der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms (13,6 eV)** ist? Was ist der wesentliche Unterschied zwischen den **Energien der stationären Zustände im Kastenpotential** und jenen im **Wasserstoffatom**?
(Lösung: $\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)$, $a = 1,66 \cdot 10^{-10} \text{ m}$)

- 6. Erwartungswerte im Kastenpotential:** Mit Hilfe der **normierten Wellenfunktionen** $\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)$ für ein Teilchen im **unendlich hohen Kastenpotential** berechne man die **Erwartungswerte $\langle X \rangle$, $\langle P \rangle$ und $\langle P^2 \rangle$** . Man kommentiere die Ergebnisse.
(Lösung: $\langle X \rangle = \frac{a}{2}$, $\langle P \rangle = 0$, $\langle P^2 \rangle = \left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2$)