1. **No Cloning - Kopieren eines Quantenzustandes $|\Psi\rangle_S = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ in einem Zwei-Zustandssystem:**

Der obige Zustand soll auf einen Targetzustand $|\varphi\rangle_T$ (der ohne Einschränkung der Allgemeinheit halber als Zustand $|0\rangle_T$ präpariert wird) kopiert werden:

$$|\Psi\rangle_S|0\rangle_T = \left(\alpha|0\rangle_S + \beta|1\rangle_S\right)\left(\alpha|0\rangle_T + \beta|1\rangle_T\right)$$

Gehen sie von folgender 'Kopier-Operation' für die Basiszustände des Zwei-Zustandssystem (Bit) aus:

$U|0\rangle_S|0\rangle_T \to |0\rangle_S|0\rangle_T$

$U|1\rangle_S|0\rangle_T \to |1\rangle_S|1\rangle_T$

a) Untersuchen die ob der **allgemeine Zustand** $|\Psi\rangle_S = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ auch kopiert werden kann.

b) Diskutieren sie den Zustand den die oben vorgeschlagen 'Kopier-Operation' erzeugt

c) Diskutieren sie die Konsequenzen für **Datenübertragung** oder **Messung**.

2. **Materiewellen**: Man bestimme die **De-Broglie-Wellenlänge** von

a) einem **Elektron** mit der kinetischen Energie $\boldsymbol{E_{kin}} = \mathbf{1\ eV}$, *(<u>Lösung</u>:* $\lambda = 1{,}23$ nm*)*

b) einem **Elektron** mit der kinetischen Energie $\boldsymbol{E_{kin}} = \mathbf{100\ keV}$, *(<u>Lösung</u>:* $\lambda = 0{,}0037$ nm*)*

c) einem **C_{60}-Molekül** mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \mathbf{10\ cms^{-1}}$, *(<u>Lösung</u>:* $\lambda = 5{,}52$ nm*)*

d) einem Molekül der Verbindung **$C_{48}H_{24}F_{51}P$** mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \mathbf{10^3\ ms^{-1}}$.
(<u>Lösung</u>: $\lambda = 2{,}5 \cdot 10^{-13}$ m*)*

e) einem **Auto** mit **2000 kg** Masse, welches sich mit $\mathbf{60\ kmh^{-1}}$ bewegt. *(<u>Lösung</u>:* $\lambda = 1{,}99 \cdot 10^{-38}$ m*)*

f) Wie schnell muß dich ein Mensch ($\boldsymbol{m} = \mathbf{80\ kg}$) bewegen, damit seine Materiewellenlänge der **Planck-Länge** entspricht? *(<u>Lösung</u>:* $v = 0{,}51$ m/s*)*

3. **Materiewellen, Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit:** Man bestimme

a) die **Phasengeschwindigkeit $\boldsymbol{v_{Ph}}$** einer ebenen Materiewelle, *(<u>Lösung</u>:* $v_{\mathrm{Ph}} = \frac{\hbar k}{2m}$*)*

b) die **Gruppengeschwindigkeit $\boldsymbol{v_g}$** eines Materiewellenpaketes. *(<u>Lösung</u>:* $v_{\mathrm{g}} = \frac{\hbar k}{m}$ *)*

c) Wie hängen die Phasengeschwindigkeit $\boldsymbol{v_{Ph}}$, die Gruppengeschwindigkeit $\boldsymbol{v_g}$ und die Teilchengeschwindigkeit $\boldsymbol{v_T}$ für ein Teilchen mit **gegebenem Impuls *p*** und **gegebener kinetischer Energie $\boldsymbol{E_{kin}}$** zusammen? *(<u>Lösung</u>:* $v_{\mathrm{g}} = 2v_{\mathrm{Ph}} = v_{\mathrm{T}}$*)*

<u>Bitte Seite wenden!</u>

4. **Relativistische Korrektur der De-Broglie-Wellenlänge.**

➔ Man bestimme das **relativistische Korrekturglied erster Ordnung** zur De-Broglie-Wellenlänge durch **Taylor-Entwicklung** der Ausdrücke für die relativistische kinetische Energie und den relativistischen Impuls, bzw. durch Vernachlässigung aller quadratischer Glieder in **(e*U*)/(*m*₀c²)** in diesen Ausdrücken.

(Lösung: $\lambda \approx \frac{\mathrm{h}}{\sqrt{2m_0 \mathrm{e}U}}\left(1-\frac{\mathrm{e}U}{4m_0\mathrm{c}^2}\right)$)

5. **Zeitabhängiges Unschärfeprodukt – „Zerfliessen" eines Gauß-glockenförmigen Wellenpaketes:** Die zeitabhängige Lösung der Schrödingergleichung für ein **freies Teilchen** läßt sich in der Form

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\Delta p}}\cdot\int_{p=-\infty}^{p=\infty}\mathrm{d}p\cdot\exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{4(\Delta p)^2}-\frac{i}{\hbar}(p-p_0)x_0+\frac{i}{\hbar}\left(px-\frac{p^2}{2m}t\right)\right)$$

schreiben. Dabei sind x_0 der Anfangsort, p_0 der Anfangsimpuls und Δp die (zeitunabhängige) Impulsunschärfe des Teilchens.

a) Man zeige, dass sich $|\Psi(x,t)|^2$ in der Form $|\Psi(x,t)|^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_t}\exp\left(-\frac{\left(x-x_0-\frac{p_0}{m}\cdot t\right)^2}{2\delta_t^2}\right)$ mit

$\delta_t=\delta_0\sqrt{1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2\delta_0^4}}$ und $\delta_0=\frac{\hbar}{2\Delta p}=(\Delta x)_0$ schreiben läßt und interpretiere dieses Ergebnis.

b) Man berechne den Erwartungswert $\langle X\rangle$ des Teilchenortes, sowie die Ortsunschärfe $(\Delta x)=\sqrt{\langle X^2\rangle-\langle X\rangle^2}$. *(Lösung: $\langle X\rangle = x_0 + t\cdot p_0/m$, $\Delta x = \delta_t$)*

c) Man zeige, dass $(\Delta x)\cdot(\Delta p)=\frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2(\Delta x)_0^4}}>\frac{\hbar}{2}$ für t > 0 und interpretiere dieses Ergebnis.

6. **Eindringen eines Teilchens in eine Potentialwand:** Ein Teilchen der **Masse *m*** und der **kinetischen Energie E_{kin}** befinde sich in einem eindimensionalen Kastenpotential der Form $E_{\mathrm{pot}}(x)=\begin{cases}0 \text{ für } 0\le x\le a\\ E_0 \text{ sonst}\end{cases}$

.

➔ Wie groß ist die Eindringtiefe δ des Teilchens in die Potentialwände, bei der die **Aufenthaltswahrscheinlichkeit** auf **50 %** gesunken ist?

➔ Man berechne diese Eindringtiefe für

a) für **E_0 = 100 eV** und ein Elektron mit **E_{kin} = 10 eV** *(Lösung: δ = 7,14 · 10^{-12} m)*
b) für **E_0 = 100 eV** und ein Elektron mit **E_{kin} = 90 eV** *(Lösung: δ = 2,14 · 10^{-11} m)*
c) für **E_0 = 1 eV** und ein Elektron mit **E_{kin} = 0,5 eV** *(Lösung: δ = 9,58 · 10^{-11} m)*