

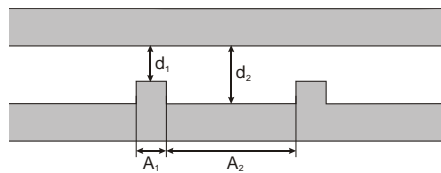
1. **Potentialtopf in einer Dimension:** Man zeige, dass für die Reflexion bzw. Transmission eines freien Teilchens der Energie $E > 0$, welches **einen Potentialtopf der Breite a und der Tiefe $-E_0$ von links kommend überquert** (der Anfangspunkt des Topfes liege bei $x = 0$), analoge Beziehungen wie für das

Durchtunneln eines Potentialwalles gelten. (Lösung: $T = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{E_0^2}{E(E - E_0)} \sin^2 \left(a \cdot \sqrt{\frac{2m(E - E_0)}{\hbar^2}} \right) + 1 \right)^{-1}$)

2. **Anwendung des quantenmechanischen Tunnelleffektes – das Rastertunnelmikroskop:** Man bestimme die **radiale Verteilung des Tunnelstromes $j(r)$** von der **Oberfläche einer metallischen Probe zur Spitze eines Rastertunnelmikroskops**. Aus der Radialverteilung des Tunnelstromes bestimme man weiters die **laterale Auflösung σ** des Tunnelmikroskops. Die **Geometrie der Spitze** entspreche einem **Rotationsparaboloid**, welches durch die Gleichung $z(r) = \frac{r^2}{2R}$ gegeben ist. Der **Radius der Spitzenverrundung** sei $R = 100 \text{ nm}$, die **Austrittsarbeit** des Metalls betrage $W_a = 4 \text{ eV}$. (Lösung: $\sigma = 2,2 \text{ nm}$)

Hinweis: Man verwende die Näherung des Transmissionskoeffizienten für den Tunnelleffekt für große Argumente von $\sinh(x)$.

3. **Tunnelleffekt an rauhen Oberflächen:** Eine raue metallische Oberfläche mit isolierten, abgeflachten Unebenheiten befindet sich nahe an einer vollkommen glatten metallischen Fläche (siehe Abbildung).



Das Flächenverhältnis A_1/A_2 , sowie die Distanzen d_1 und d_2 seien gegeben. die **Stromdichte** des Tunnelstromes besitzt die Form $j(d) = D \exp(-2\kappa d)$ ($D [\text{Am}^{-2}]$.. konstanter Faktor).

- a) Man berechne zunächst **allgemein** die **prozentuellen Anteile P_1 und P_2** der **Tunnelströme I_1 und I_2** am **Gesamtunnelstrom I** .

Für $\kappa = 10^{10} \text{ m}^{-1}$ berechne man weiters:

- b) P_1 und P_2 für $A_1/A_2 = 0,01$, $d_1 = 1 \text{ nm}$, sowie $d_2 = 1,5 \text{ nm}$. (Lösung: $P_1 = 99,55 \%$, $P_2 = 0,45 \%$)
 c) jene Distanz d_1 , für die bei $d_2 = 1,5 \text{ nm}$ $P_1 = P_2 = 50 \%$ ist ($A_1/A_2 = 0,01$). (Lösung: $d_1 = 1,27 \text{ nm}$)

4. **Stationäre Zustände, Separation der Schrödingergleichung und Kastenpotential:**

- a) Man zeige allgemein, dass sich die Lösungsfunktion der zeitabhängigen Schrödingergleichung $\Psi(\vec{r}, t)$ für das zeitlich konstante Potential $E_{\text{pot}}(\vec{r})$ für einen **stationären Zustand** als Produkt $\Psi(\vec{r}, t) = f(\vec{r})g(t)$ darstellen läßt. Man gebe die Gleichung für $f(\vec{r})$ für den eindimensionalen und den dreidimensionalen Fall an.

- b) Für ein **unendlich hohes Kastenpotential** der Form $E_{\text{pot}}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, a] \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$ berechne man die

Wellenfunktionen und Energien der stationären Zustände. Welche **laterale Ausdehnung** müsste dieses Potential haben, damit die **Grundzustandsenergie eines Elektrons im Kasten gleich der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms (13,6 eV)** ist? Was ist der wesentliche Unterschied zwischen den **Energien der stationären Zustände im Kastenpotential** und jenen im **Wasserstoffatom**?

(Lösung: $\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)$, $a = 1,66 \cdot 10^{-10} \text{ m}$)