Grundlagen der Physik III - Übungen

Assoc.Prof. Dr. R.A. Wilhelm
wilhelm@iap.tuwien.ac.at
TU Wien - Grundlagen der Physik III (134.125) 2023W

16.11.2023

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE PHYSIK
Institute of Applied Physics

Aufgabe 04.1 - 2 Pkt.

Um Wellenfunktionen oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Quantenmechanik zu normieren, ist oft das Integral über eine Gauß'sche Glockenkurve zu bilden. Man bestimme die Konstante

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma}\right)} \mathrm{d}x$$

für diese allgemeine Form der Gauß'schen Glockenkurve.

Lösung: $C = \sqrt{\pi\sigma}$

Aufgabe 04.2 - 3 Pkt.

Die nicht normierten zeitabhängigen Wellenfunktionen der stationären Zustände eines Teilchens im unendlich hohen eindimensionalen Kastenpotential lauten

$$\Psi_n(x,t) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) \text{ für } 0 \leq x \leq a$$

wobei a die lineare Ausdehnung des Kastenpotentiales ist.

(a) Berechnen Sie die Normierungskonstante C
(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle X \rangle$,
(c) $\langle P \rangle$
(d) $\langle P^2 \rangle$ für die normierten Wellenfunktionen. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Hinweis: Nehmen Sie gegebenenfalls Integraltafeln bzw. MATHEMATICA zur Lösung der unbestimmten Integrale zu Hilfe. Trigonometrische Umformungen helfen ebenfalls!

Lösung: (a) $C = \sqrt{\frac{2}{a}}$, (b) $\langle X \rangle = \frac{a}{2}$, (c) $\langle P \rangle = 0$, (d) $\langle P^2 \rangle = \frac{\hbar^2\pi^2}{a^2}n^2$

Aufgabe 04.3 - 4 Pkt.

Ein harmonischer Oszillator (Teilchenmasse m, Eigen(kreis)frequenz ω_0 hat das Potential:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi_1(x) = A \cdot x \cdot \exp\left(-\alpha x^2\right)$ eine Lösung der Schrödingergleichung für dieses Potential ist.
(b) Bestimmen Sie den Wert von α.
(c) Welchen Eigenwert E_1 hat die Energie?
(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$ und stellen Sie diese graphisch dar.

Hinweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$

Lösung: (b) $\alpha = \frac{m\omega_0}{2\hbar}$, (c) $E_1 = \frac{3}{2}\omega_0\hbar$, (d) $w(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m\omega_0}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} x^2 e^{-\frac{m\omega_0}{\hbar}x^2}$

Aufgabe 04.4 - 3 Pkt.

Streuung eines Stroms von Teilchen an einer gegeben Potentialverteilung in den drei Bereichen I, II, und III der Form

I:	$V(x) = 0$	$x < -a$
II:	$V(x) = V_0$	$-a < x < 0$
III:	$V(x) = \infty$	$0 < x$

Dieser Strom von Teilchen der Masse m und der Energie $E > V_0$ falle in positiver x-Richtung laufend auf diese Potentialverteilung ein.

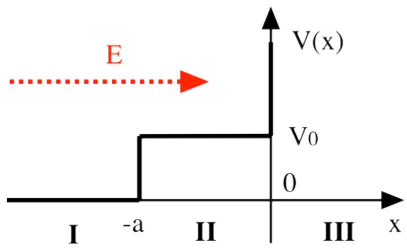

Figure 1: Skizze des Problems.

Leiten Sie aus der zeitunabhängigen Schrödingergleichung die Wellenfunktion im Bereich I unter Verwendung der Abkürzungen $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ (Bereich I) und $q = \sqrt{2m(E+V_0)/\hbar^2}$ (Bereich II) ab. Berechnen Sie den Reflexionskoeffizient R.

Lösung: $R = 1$

Aufgabe 04.5 - 2 Pkt.

Leiten Sie, ausgehend vom Impulsoperator $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, einen Ausdruck für die x-Komponente $\hat{L}_x$ des Drehimpulsoperators in Kugelkoordinaten her.

Lösung: $i\hbar\left[\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$