Grundlagen der Physik III - Übungen

Assoc.Prof. Dr. R.A. Wilhelm
wilhelm@iap.tuwien.ac.at
TU Wien - Grundlagen der Physik III (134.125) 2023W

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE PHYSIK
Institute of Applied Physics
IAP

18.01.2024

Aufgabe 10.1 - 4 Pkt.

Gegeben sei ein Ensemble von gleichartigen Atomen, welche idealisiert durch zwei nicht entartetet Energieniveaus 1 und 2 (mit statistischen Gewichten $g_1 = g_2 = 1$) beschrieben werden. Dabei gelte $E_1 \ll E_2$. Die Atome seien so präpariert, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ gelte: $N_1(t = 0) = 0$ und $N_2(t = 0) = N_0$, d.h. alle Atome sollen sich im angeregten Zustand befinden (vollständige Besetzungsinversion). Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde eine praktisch monochromatische Laserstrahlung (Dauerstrichlaser) mit der spektralen Energiedichte w_ν mit der Resonanzfrequenz des Übergangs 2 nach 1 eingeschaltet. Die N_0 Atome befinden sich immer im Laserstrahl (Idealisierung!) und ihre Geschwindigkeiten seien extrem klein (ebenfalls Idealisierung).

(a) Die möglichen Übergangswahrscheinlichkeiten und damit die Änderungen der Besetzungszahlen $N_1(t)$ und $N_2(t)$ der beiden Zustände pro Zeiteinheit sind durch die Einsteinkoeffizienten A_{21}, B_{21} und B_{12} gegeben. Stellen Sie Ratengleichungen auf, welche die zeitliche Änderung der Besetzungszahlen $N_1(n)$ und $N_2(t)$ beschreiben.

(b) Berechnen Sie die zeitliche Änderung der Besetzungszahlen $N_1(t)$ und $N_2(t)$.

(c) Das besetzungsinvertierte Atomensemble soll die Laserstrahlung verstärken. Berechnen Sie $\Delta N(t) = N_2(t) - N_1(t)$ und skizzieren Sie diese Lösungsfunktionen (nehmen sie dafür folgende Zahlenwerte: $A = 1, B = 1, w_\nu = 5, N_0 = 1$). Wann tritt Verstärkung auf?

(d) Berechnen Sie ΔN (analytisch) für folgende Fälle: $t = 0, t = \infty, w_\nu = 0, w_\nu$ sehr groß bei $t = \infty$.

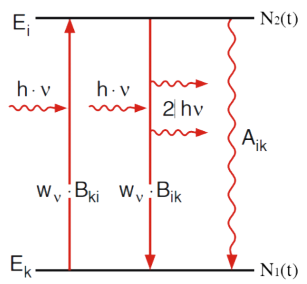

Figure 1: Skizze des Problems.

Lösung(sansatz): (a)
$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 (A + w_\nu B) + N_1 (w_\nu B)$
$\frac{dN_1}{dt} = +N_2 (A + w_\nu B) - N_1 (w_\nu B)$

Aufgabe 10.2 - 2 Pkt.

Das Bindungspotential einfacher Moleküle und Festkörper kann oft durch das sogenannte Lennard-Jones Potential (siehe Abbildung) beschrieben werden. Dieses hat die Form

$$U(r) = -Ar^{-n} + Br^{-m}.$$

Der Abstand r_0 entspricht der Bindungslänge, die Energie U_0 der Bindungsenergie (siehe Abbildung).

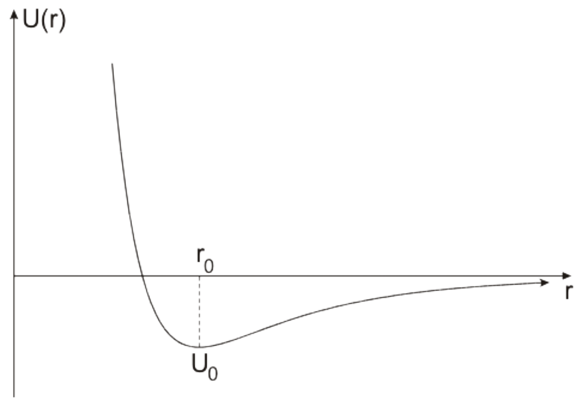

Figure 2: Skizze des Problems.

(a) Man berechne die Konstanten A und B als Funktionen von r_0 und U_0.

(b) Man approximiere in der Nähe von r_0 das Lennard-Jones-Potential mit Hilfe eines Oszillatorpotentiales und gebe die Federkonstante C des Oszillators an.

Lösung: (a) $A = \frac{U_0 \cdot r_0^n}{(\frac{n}{m} - 1)}$, $B = \frac{U_0 \cdot {r_0}^m}{(1 - \frac{m}{n})}$, (b) $C = -\frac{n \cdot m \cdot U_0}{r_0^2}$

Aufgabe 10.3 - 3 Pkt.

(a) Wie kommt die Lücke im Spektrum bei $1/\lambda = 2885.90\,\mathrm{cm}^{-1}$ zustande? Was ist die Energie des ersten angeregten Vibrationszustandes?

(b) Berechnen Sie den mittleren Kernabstand R_e des HCl-Moleküls.

(c) Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass die Absorptions-Peaks eine Substruktur (Dopplepeak) haben. Wie erklären Sie sich dies?

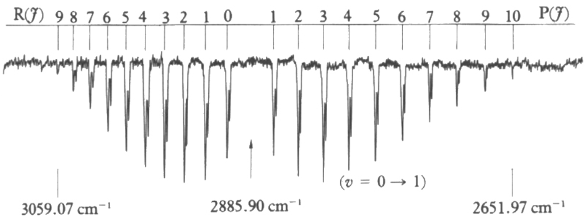

Figure 3: Skizze des Problems.

Lösung: (a) $0.359\,\mathrm{eV}$, (b) $1.3\,\mathrm{Å}$

Aufgabe 10.4 - 2 Pkt.

Es wird die Rotationsschwingungsbande des CO-Moleküls untersucht. Für die erste Linie des PZweiges werde die Wellenzahl $2165.4\,\mathrm{cm}^{-1}$, für die erste Linie des R-Zweiges die Wellenzahl $2173.0\,\mathrm{cm}^{-1}$ gemessen. Berechnen sie aus diesen Angaben

(a) die Oszillationsfrequenz
(b) das Trägheitsmoment
(c) den Gleichgewichtsabstand des CO-Moleküls.
Hinweis: $h\nu = E_{\nu' J'} - E_{\nu'' J''}$, wobei $E_{\nu J} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \frac{J(J+1)\hbar^2}{2MR_e^2}$

R-Linien:
$\Delta\nu = \nu' - \nu'' = +1$ und $\Delta J = J' - J'' = +1$
P-Linien:
$\Delta\nu = \nu' - \nu'' = +1$ und $\Delta J = J' - J'' = -1$

Lösung: (a) $f = 6.5076 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$, (b) $I = 1.47 \cdot 10^{-46}\,\mathrm{kgm}^2$, (c) $R_e = 113.6\,\mathrm{pm}$

Aufgabe 10.5 - 3 Pkt.

(a) Beschreiben Sie ein sp-Hybridorbital entlang der z-Achse aus den Wellenfunktionen

$$\psi_{2\ s} = \frac{1}{2\sqrt{2}a_0^{3/2}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \cdot \mathrm{e}^{-r/(2a_0)}$$

und

$$\psi_{2\mathrm{p}_z} = \frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0}\right) \cdot \mathrm{e}^{-r/(2a_0)} \cos\vartheta$$

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeitsdichte bei $r = a_0$?
(c) Wie groß ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im 2 s - und $2\mathrm{p}_z$-Orbital bei $r = a_0$?

Lösung: (b) Für $r = a_0$ und $\vartheta = 0$: $|\psi_\pm|^2 = \frac{1}{8}a_0^{-3}\mathrm{e}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^2 = 0.156 \cdot \mathrm{e}^{-1}a_0^{-3}$
Für $r = a_0$ und $\vartheta = \pi$: $|\psi_\pm|^2 = \frac{1}{8}a_0^{-3}\mathrm{e}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^2 = 0,0112 \cdot \mathrm{e}^{-1}a_0^{-3}$
(c) 2s: $\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-1}a_0^{-3}$, 2p: $\frac{1}{24}\mathrm{e}^{-1}a_0^{-3}$