Praktikumsplatz Nr. 58, 59, 60

DICHTEBESTIMMUNG FÜR FESTE UND FLÜSSIGE KÖRPER

AUFGABENSTELLUNG

Das Gewicht und die Dichte von festen und flüssigen Körpern soll durch Wägungen ermittelt werden. Jede Wägung soll dabei mindestens drei mal durchgeführt werden.
Es sind die Mittelwerte und die Fehler zu bestimmen.
Folgende 5 Versuche sollen dabei durchgeführt werden:

- Bestimmung der Dichte einer Probenflüssigkeit mit der hydrostatischen Waage;

- Bestimmung des Nullpunktes und der Empfindlichkeit der analytischen Balkenwaage;

- Bestimmung des Gewichtes eines Probenkörpers mit der analytischen Balkenwaage;

- Bestimmung des Gewichtes und der Dichte eines Probenkörpers mit der elektronischen Analysenwaage und mit dem Pyknometer (Inhalt ca. 10 ml);

- Bestimmung der Dichte einer Probenflüssigkeit mit der elektronischen Analysenwaage und dem Pyknometer (Inhalt ca. 10 ml).

Revision 28.9.1988, Johann LAIMER
20.4.1993, Herbert SASSIK

LITERATUR:W.Walcher," Praktikum der Physik", (Teubner,Stuttgart 1971).
W. Westphal,"Physikalisches Praktikum",
(Vieweg,Braunschweig 1966)
E. Ulrich," Physikalisches Praktikum", (Girardet, Essen 1963).

MAN INFORMIERE SICH ÜBER:

Massenmessung mit der analytischen Waage.
Methoden zur Dichtebestimmung von festen und flüssigen Körpern.
Definition und Meßeinheit der beteiligten physikalischen Größen.
Fehlerrechnung.

VERFÜGBARE GERÄTE:

Hydrostatische Waage mit Reitersatz (2x5g,3x0.5g,1x0.05g 1x0.005g), Tauchkörper,Thermometer.
Analytische Waage mit Reiter (0.01g) und Gewichtsatz (0.001g bis 200g).
Zubehör (1 Pyknometer, 2 Standzylinder, 1 Trichter, 1 Liter destilliertes Wasser)
1 elektronische Analysenwaage (Betriebsanleitung Beilage 6).

HINWEISE:

Am Beginn des Praktikums ist vom Betreuer eine Probeflüssigkeit und ein Probefestkörper auszufassen. Diese sind nach Beendigung der Versuche wieder zurückzugeben. Jene Teile des Zubehörs, die mit der Probeflüssigkeit in Berührung kamen, sind mit normalem Wasser sorgfältig zu reinigen und so aufzustellen, daß sie rasch trocknen können.
Es ist ein Protokoll anzufertigen, das *alle* gemessenen Daten enthält! Darüberhinaus ist auf der ersten Seite des Protokolls die Dichte der Probeflüssigkeit und des Probefestkörpers, das Gewicht des Probekörpers und die Meßtemperatur , mit dem jeweiligen Fehler, anzugeben.

Versuchsanleitung

1. Hydrostatische Waage:

Bei der Bestimmung der Dichte einer Probeflüssigkeit gehe man analog zur Anleitung in Punkt 2.3.3. (Beilage 1) vor. Die Dichte von destilliertem Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur ist in Beilage 3 aufgeführt. Die Wägungen sind jeweils mindestens 3 mal durchzuführen. Man gebe die mittlere Dichte und die Meßtemperatur an. Außerdem ist eine Fehlerrechnung durchzuführen (siehe Beilage 5).

2. Analytische Waage:

Für alle Wägungen sind Einzelwägungen (d.h. ohne Vertauschen von Probe und Gewicht) ausreichend, aber die einzelnen Wägungen sind mindestens 3 mal durchzuführen.

2.1. Bestimmung von Nullpunkt und Empfindlichkeit der Waage:

Man gehe analog zu Punkt 2.2.1.1. (Beilage 1) vor. Man zeichne ein Diagramm der Empfindlichkeit in Abhängigkeit von der Belastung.
Bei den späteren Messungen soll von Zeit zu Zeit der Nullpunkt kontrolliert werden!

2.2. Bestimmung der Dichte eines festen Körpers mit dem Pyknometer:

Man bestimme zunächst das Gewicht G_K des Körpers; dann gibt man ihn in das Pyknometer (siehe Beilage 4), füllt es mit destilliertem Wasser bis zum Ende der Kapillare und bestimme das Gewicht $G_{K,W}$ des Pyknometers mit Körper und Wasser; schließlich entfernt man den Körper im Pyknometer, füllt es wieder bis zum Ende der Kapillare mit destilliertem Wasser und bestimmt das Gewicht G_W.
Abgesehen vom Einfluß des Luftauftriebes wäre

$$\frac{d_K}{d_W} = \frac{G_K}{G_W - G_{K,W} + G_K} \qquad (1)$$

Aus der Überlegung, daß für Gewichtsbestimmungen der Auftrieb in Luft einer scheinbaren Verminderung der Dichte jedes Körpers um die Dichte der Luft d_L (Beilage 2) gleichkommt, ergibt sich die korrigierte Beziehung

$$\frac{d_K - d_L}{d_W - d_L} = \frac{G_K}{G_W - G_{K,W} + G_K} \qquad (2)$$

und somit

$$d_K = \frac{G_K}{G_W - G_{K,W} + G_K} (d_W - d_L) + d_L \qquad (3)$$

Unter Berücksichtigung des Auftriebs der Gewichte ändert sich nur dann nichts an dem in Gleichung (2) ausgedrückten Verhältnis, wenn die Dichte der Gewichte für die Messung von G_K, $G_{K,W}$, G_W gleich ist. Man bestimme nach (3) die Dichte des festen Probenkörpers bei der Meßtemperatur. Eine Fehlerrechnung ist durchzuführen.

2.3. Bestimmung der Dichte eines flüssigen Körpers mit dem Pyknometer:

Um die Dichte einer Flüssigkeit zu bestimmen, gehe man analog vor. Bedeutet G_0 das Gewicht des leeren Pyknometers, G_F das Gewicht des mit der Probeflüssigkeit gefüllten Pyknometers und G_W das Gewicht des mit destilliertem Wasser gefüllten Pyknometers, so gilt analog zu (2)

$$\frac{d_F - d_L}{d_W - d_L} = \frac{G_F - G_0}{G_W - G_0} \qquad (4)$$

und daraus

$$d_F = \frac{G_F - G_0}{G_W - G_0} (d_W - d_L) + d_L \qquad (5)$$

Man bestimme hiernach die Dichte der Probeflüssigkeit bei der Meßtemperatur. Eine Fehlerrechnung ist durchzuführen.

mit der gewölbten Seite nach oben und setze darauf das Dreibein. Die Spindel muß dabei so weit hochgeschraubt sein, daß sie beim Aufsetzen die Linsenoberfläche nicht berührt, da die Spindelspitze sonst beschädigt werden kann. Jetzt senke man die Spindel bis zur Berührung mit dem Linsenscheitel und lese die Höhe h_s ab. Der Schnitt durch die Linse (Fig. 2.6), der durch die Auflagepunkte des Dreibeins gelegt wird, ist ein Kreis vom Radius r, der identisch ist mit dem Umkreis K_1 des Dreiecks, das die Spitzen des Dreibeins bilden.

Aus Fig. 2.5 folgen die Zusammenhänge

$$R^2 = (R - s)^2 + r^2 \quad \text{und} \quad s = h_s - h_0 \,, \tag{2.6}$$

und daraus ergibt sich

$$R = \frac{r^2 + (h_s - h_0)^2}{2(h_s - h_0)} \,. \tag{2.7}$$

Zur Bestimmung von r lege man einen Bogen Papier auf G und stelle mit leichtem Druck das Dreibein darauf. Seine Spitzen hinterlassen im Papier feine Vertiefungen oder Löcher, die man durch Geraden verbindet. Die Mittelsenkrechten auf den Strecken zwischen den Einstichpunkten schneiden sich im Mittelpunkt M des Umkreises. Der Abstand des Punktes M von den Einstichpunkten ist r.

2.1.4. Kathetometer

2.1.4.0. Methode. Zur Messung von Längen oder Verschiebungen in vertikaler Richtung verwendet man das Kathetometer (Fig. 2.7). Auf einem vertikalen Zapfen A mit der Achse A_1, der auf einem massiven Dreibein befestigt ist, ist das Führungsrohr F angebracht, das sich um A spielfrei drehen läßt. F seinerseits dient als Führung für den Schieber S, dessen Höhe h am Maßstab M abgelesen werden kann. Zur Erhöhung der Meßgenauigkeit trägt S, ähnlich wie bei der Schieblehre, den Nonius N, der häufig mit einer Lupe ausgerüstet ist. Mit S fest verbunden ist das horizontal gerichtete Fernrohr FR, das zusammen mit S und F um A geschwenkt werden kann. Es läßt sich so auf jedes Azimut einstellen.

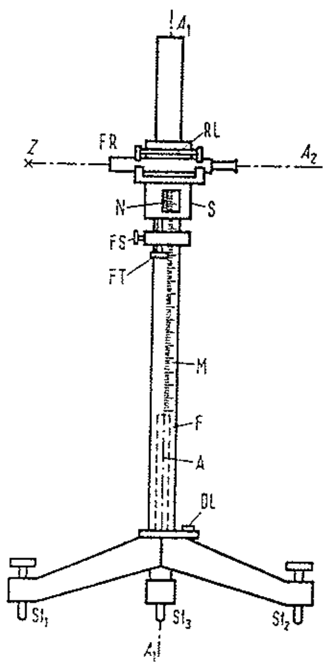


Fig. 2.7 Kathetometer
FR Fernrohr mit Fadenkreuz; RL Röhrenlibelle; S Schieber; N Nonius; FT Feintrieb zur genauen Einstellung der Fernrohrhöhe; FS Feststellschraube; M Maßstab; F Führungsrohr; DL Dosenlibelle; A Drehzapfen für F; A_1 Achse des Kathetometers; A_2 optische Achse des Fernrohrs.

Beilage 1

2.1.4.1. Gang des Versuchs. Vor der Messung muß das Kathetometer justiert werden. Dabei setze man voraus, daß mechanische und optische Achse A_2 des Fernrohrs übereinstimmen, ferner, daß die optische Achse des Fernrohrs senkrecht auf F steht und daß die Achse von F mit A_1 zusammenfällt[1]). Um A_1 senkrecht und damit FR waagerecht zu stellen, ist das Dreibein mit der Dosenlibelle DL ausgerüstet. Mit ihrer Hilfe wird A_1 durch Verdrehen der Stellschrauben $St_{1,2,3}$ grob justiert. Zur Feinjustierung verwendet man die Röhrenlibelle RL an FR. Man schwenkt FR so weit, bis es parallel zur Verbindungslinie zweier beliebiger Stellschrauben St steht. Dann verdreht man die beiden ausgezeichneten Schrauben, bis RL horizontale Richtung anzeigt. Danach schwenkt man FR um 90° und stellt durch Betätigen der dritten Schraube RL wieder horizontal ein. Dieses Verfahren wiederhole man, bis FR in jeder Azimutstellung waagerecht steht. Zur Messung richtet man FR auf die Zielmarke Z, indem man FR so lange schwenkt und verschiebt, bis das Bild von Z mit dem Schnittpunkt des Fadenkreuzes zur Deckung kommt (Parallaxenfreie Einstellung! vgl. 4.2.1.0).

Zur genauen Einstellung ist S mit dem Feintrieb FT ausgestattet. Die Höhe h des Fernrohrs wird an M mit Hilfe des Nonius N abgelesen. Man erreicht mit diesem Meßverfahren bei den üblichen Kathetometerausführungen Meßgenauigkeiten von einigen hundertstel Milimetern.

2.2. Massenmessung

2.2.0. Grundlagen

Jeder Körper besitzt eine Masse. Die Eigenschaft „Masse" ist der elementaren Beobachtung zugänglich durch die Schwere und die Trägheit. Schwer heißt, daß auf einen Körper, der in ein Schwerefeld gebracht wird, eine Kraft wirkt. Diese Kraft heißt Gewichtskraft. Träge bedeutet, daß ein Körper seine Bewegung (Betrag und Richtung seiner Geschwindigkeit) beibehält, wenn keine Kraft auf ihn einwirkt.

Der Zusammenhang zwischen der Gewichtskraft G, der Masse m und der Schwerefeldstärke g ist gegeben durch die Definitionsgleichung der Schwerefeldstärke

$$G = mg \,. \tag{2.8}$$

g ist auf der Erdoberfläche nur ungefähr konstant. Die relative Änderung $\Delta g/g$ beim Übergang vom Äquator zum Pol beträgt etwa $5 \cdot 10^{-3}$. Für unsere Zwecke genügt der mittlere Wert von $g = 9{,}81$ N/kg $= 9{,}81$ m/s². Zwei Massen sind gleich, wenn sie auf einer Balkenwaage vertauscht werden können, ohne daß sich deren Ausschlag ändert. Dieser Befund ist unabhängig von g (g darf nur nicht verschwinden). Mit einer Balkenwaage (Hebelwaage) vergleicht man also Massen. Zum Vergleich dienen Massennormale, auch Gewichtstücke oder Wägestücke genannt; in diesem Buch werden sie als Massenstücke bezeichnet. Sie sind abgeleitet von einem in Sèvres (Frankreich) aufbewahrten Massennormal, dessen Masse als ein Kilogramm (kg) definiert wurde. Vgl. auch Anmerkung auf S. 342.

Die Balkenwaage ist ein dreiarmiger physikalischer Hebel. Der

[1]) Bei neueren Kathetometern sind diese Einstellungen meistens fest vorgegeben, bei älteren Geräten sind dafür Justiermöglichkeiten vorgesehen.

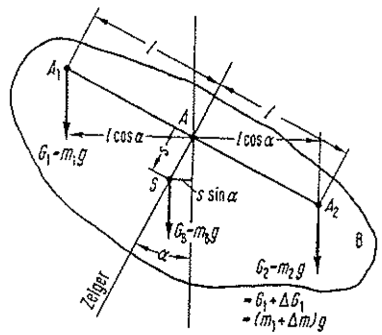


Fig. 2.8
Die Waage als dreiarmiger Hebel $A-A_1$, $A-A_2$ und $A-S$ sind die drei Arme, an denen die Kräfte G_1, G_2 und G_3 angreifen. Die Gestalt des Körpers „Waagebalken" B ist grundsätzlich beliebig.

Waagebalken B (Fig. 2.8), der grundsätzlich eine beliebige Form haben könnte, in der Praxis aber meist aus einem regelmäßig gestalteten Gitterbalken (kleine Masse bei großer Biegungssteifigkeit) besteht, ist um eine Achse A drehbar (Schneide-Pfanne), die nicht durch den Schwerpunkt S (= Angriffspunkt der Gewichtskraft G_B des Waagebalkens) des Waagebalkens geht. Solange S unterhalb A, befindet sich der Waagebalken im stabilen Gleichgewicht, S wird sich senkrecht unter A einstellen (Null-Lage). Wird der Waagebalken um den Winkel α verdreht, so wirkt ein „rücktreibendes Drehmoment" $M_B = G_B\, s \sin\alpha$, das eine Schwingung um die Null-Lage verursacht und (wegen der Dämpfung) den Waagebalken in die Null-Lage einpendeln läßt. Der Winkel = Ausschlag α kann an einem Zeiger, der mit B starr verbunden ist und über einer mit dem Stativ starr verbundenen Skala spielt, abgelesen werden. Der Zeiger hat mit dem dritten Waagearm nichts zu tun. Der dritte Hebelarm ist vielmehr die Strecke $A\,S$. An den im gleichen Abstand l von der Achse A in einer Geraden angebrachten Drehachsen A_1 und A_2 (ebenfalls Schneide-Pfanne) sind die Waagschalen aufgehängt; A_1 und A_2 sind daher die Angriffspunkte der Kräfte $G_1 = m_1 g$ und $G_2 = m_2 g$. Am Waagebalken herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der Drehmomente Null ist, bzw. wenn die Summe der linksdrehenden gleich der Summe der rechtsdrehenden Momente ist:

$$m_1 g l \cos\alpha + m_B g s \sin\alpha = m_2 g l \cos\alpha\ . \qquad (2.9)$$

Gl. (2.9) läßt erkennen, daß im Falle $m_2 = m_1$ der Ausschlag Null wird, d. h. die Waage sich in ihre Null-Lage (Ruhelage, Gleichgewichtslage) einstellt. Ist $m_2 \neq m_1$, was beim Wägen zunächst immer der Fall sein wird, z. B. $m_2 = m_1 + \Delta m$, so ergibt Gl. (2.9) für den Ausschlag

$$\tan\alpha = \frac{l}{m_B \cdot s}\,\Delta m\ , \qquad (2.10)$$

was für kleine Winkel ($\tan\alpha \approx \alpha$, vgl. (Gl. 1.39))

$$\alpha = \frac{l}{m_B \cdot s}\,\Delta m \qquad (2.11)$$

geschrieben werden kann. α ist also unabhängig von g und proportional zur Massendifferenz Δm. Das Verhältnis

$$\varepsilon = \frac{\text{Ausschlag}}{\text{Massendifferenz}} = \frac{\alpha}{\Delta m} = \frac{l}{m_B \cdot s} \qquad (2.12)$$

nennt man die Empfindlichkeit der Waage. Der Ausschlag wird bei der Empfindlichkeitsangabe einer Waage meist nicht als Winkel, sondern in Skalenteilen der Waagenskala, die Empfindlichkeit daher in SkT/mg angegeben.

Bei der obigen Betrachtung wurde vorausgesetzt, daß alle drei Schneiden sowohl in unbelastetem Zustand als auch bei belasteter Waage streng in einer Ebene liegen. Das setzt sowohl eine sehr hohe Präzision in der Fertigung als auch eine hohe Biegesteifigkeit des Waagebalkens voraus. Wenn man bedenkt, daß bei Analysenwaagen mit einer Empfindlichkeit von etwa 1 SkT/mg die Entfernung $s \approx 100$ µm beträgt, so erkennt man, daß die Justierfehler und die maximal auftretenden Durchbiegungen klein gegen 100 µm sein müssen, wenn die obigen Voraussetzungen erfüllt sein sollen. Da einerseits nach Gl. (2.12) die Verkleinerung von s die einzige Möglichkeit ist, um die Empfindlichkeit zu erhöhen (eine Verlängerung von l würde eine Vergrößerung von m_B um etwa den gleichen Faktor zur Folge haben, und beide Effekte würden sich nach Gl. (2.12) kompensieren), andererseits die Justier- und Durchbiegefehler sich bei kleiner werdendem s immer stärker bemerkbar machen, müssen beide Effekte in eine genaue Theorie aufgenommen werden. Jeder der beiden Anteile bewirkt eine belastungsabhängige Empfindlichkeit.

Waagen und Massensätze sind Präzisionsinstrumente, sie erfordern eine behutsame Behandlung. Man beachte daher folgendes: Der zum Schutz von äußeren Einflüssen angebrachte Waagekasten soll nur während des Einbringens des zu wägenden Materials und der Vergleichsmassenstücke geöffnet sein. Generell soll die Waage nur während der Ablesung in der entarretierten Stellung stehen. Besonders beim Auflegen und Abnehmen von Gegenständen von den Schalen und bei der Verschiebung des Reiters muß die Waage immer arretiert sein. Der Reiter und die Massenstücke dürfen nicht mit den Fingern berührt werden. Zur Verschiebung des Reiters ist ein von außen bedienbarer Haken an der Waage angebracht. Massenstücke werden mit der dem Massensatz beiliegenden Pinzette angefaßt.

Die Massensätze sind so eingerichtet, daß sich alle Massen bis zu einer oberen Grenze in Schritten von 5 oder 10 mg zusammenstellen lassen. Massenstücke unter 10 mg sind entbehrlich. An ihrer Stelle benutzt man den Reiter, einen U-förmig gebogenen Platin- oder Aluminiumdraht mit der Masse 10 mg, der auf eine in 10 Teile geteilte Strecke, das **Reiterlineal**, gesetzt werden kann. Sitzt der Reiter über dem n-ten Teilstück, dann entspricht seine Wirkung (Hebelgesetz) einer Masse von n mg auf der Waagschale.

2.2.1. Nullpunkt und Empfindlichkeit der Waage

2.2.1.0. Methode. Die **Nullpunktbestimmung** wird **grundsätzlich** (außer bei Waagen mit Dämpfungseinrichtung) **im schwingenden Zustand** durch die Messung der Schwingungsumkehrpunkte durchgeführt. Um die **Ablesegenauigkeit zu erhöhen**, beobachtet man dabei Zeiger und Skala durch eine Lupe. Zur Vermeidung von Ablesefehlern durch Parallaxe, muß man den Kopf immer in der gleichen Stellung halten. Um die Kopfhaltung zu kontrollieren, überzeuge man sich, daß Skala und Berandung der Ableselinse, immer die gleiche Stellung zueinander haben.

Die Schwingung ist wegen der unvermeidlichen Reibung schwach gedämpft. (Starke oder unregelmäßige Abnahme der Amplitude deutet auf einen Fehler in der Waage hin). Die Umkehrpunkte U_i (Fig. 2.9) liegen bei schwacher Dämpfung in guter Näherung stückweise auf zwei zum Schwingungsmittelpunkt A_0 (Null-Lage der Waage) symmetrischen Geraden (genauere Darstellung in 7.1). Zur Bestimmung von A_0 braucht man wenigstens drei aufeinanderfolgende „Ausschläge" A_1, A_2, A_3, gemessen von einem beliebigen Nullpunkt der Skala (z. B.

linker Rand; nimmt man die Skalenmitte als Nullpunkt, so erhält man auch negative A-Werte). Das arithmetische Mittel $A_2' = (A_1 + A_3)/2$ der Werte A_1 und A_3 liefert die Ordinate des Punktes U_2' (Fig. 2.9), der wegen der Symmetrie

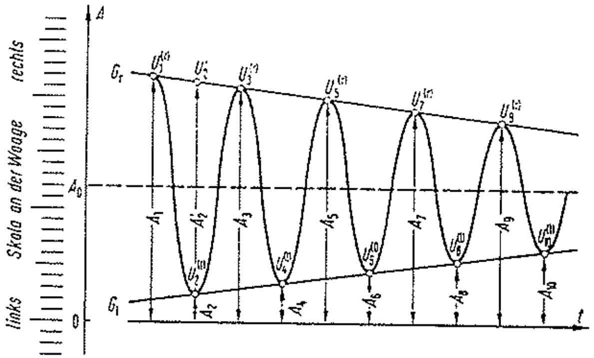


Fig. 2.9
Ausschlag einer Waage in Abhängigkeit von der Zeit t
U Umkehrpunkte,
A Ausschlagsgrößen,
A_0 Schwingungsmittelpunkt.

der Geraden G_r und G_l spiegelbildlich zu U_2 liegt. Das arithmetische Mittel von A_2 und A_2' ergibt dann den „Nullpunkt"

$$A_0 = \frac{\frac{A_1+A_3}{2} + A_2}{2} = \frac{1}{4}(A_1 + 2A_2 + A_3) \ . \qquad (2.13)$$

Zur genaueren Bestimmung von A_0 mißt man die A-Werte mehrerer aufeinanderfolgender Umkehrpunkte, jedoch immer eine ungerade Anzahl, bildet den Mittelwert $\overline{A^{(l)}}$ und den Mittelwert $\overline{A^{(r)}}$ und wiederum hiervon den Mittelwert

$$A_0 = \frac{\overline{A^{(l)}} + \overline{A^{(r)}}}{2} \ . \qquad (2.14)$$

Bei der Bestimmung des Nullpunktes soll der Reiter auf die Mitte des Reiterlineals aufgesetzt werden. Die mit und ohne Reiter bestimmten Nullpunkte stimmen nämlich nur dann überein, wenn der Nullpunkt der Reiterskala genau über der Mittelschneide liegt.

Bei modernen Waagen mit Dämpfungseinrichtung entfällt die Ablesung im schwingenden Zustand. Bei ihnen wird der Wert abgelesen, auf den sich die Waage im Ruhezustand einstellt.

Die Messung der Empfindlichkeit ε wird analog zur Nullpunktbestimmung im schwingenden Zustand durchgeführt. Man belastet die Waage einseitig durch Verschieben des Reiters um n Skalenteile des Reiterlineals aus der Nullstellung und bestimmt den neuen Schwingungsmittelpunkt B_0. Dann ist

$$\varepsilon = \frac{B_0 - A_0}{n\,\mathrm{mg}} \ . \qquad (2.15)$$

Diese Messung ist wegen der Belastungsabhängigkeit von ε bei verschiedenen Massen $m_1 = m_2$ durchzuführen. Da die links und rechts aufgelegten Massenstücke nicht exakt übereinstimmen muß für jeden Wert von m_1 der Nullpunkt A_0 erneut ermittelt werden.

2.2.1.1. Gang des Versuchs. 1) Man setze den Reiter auf den Nullpunkt des Reiterlineals. — 2) Man löse durch vorsichtiges Drehen des Feststellknopfes die Arretierung der Waage (schwingt die Waage nicht, dann drehe man noch einmal vorsichtig am Arretierungsknopf). — 3) Man lasse zwei Schwingungen verstreichen und lese dann fünf aufeinanderfolgende Umkehrpunkte, drei auf der einen, zwei auf der anderen Seite ab. — 4) Man verschiebe bei wieder arretierter Waage den Reiter so weit, bis der geschätzte Ausschlag $B_0 - A_0$ einige Skalenteile beträgt und bestimme B_0 entsprechend 3). — 5) Man lege bei arretierter Waage links und rechts gleiche Massen $m_1 = m_2$ auf und wiederhole für jeden Wert von m_1 die Messungen nach 1) bis 4). — 6) Man berechne die Werte der Empfindlichkeit der Waage nach Gl. (2.15) für die verschiedenen Belastungen und trage ε als Funktion von m_1 in einem Diagramm auf.

2.2.2. Wägung eines Körpers

2.2.2.0. Methode. Vgl. 2.2.1.0

2.2.2.1. Gang des Versuchs. Vor jeder Wägung bestimme man den Nullpunkt der Waage neu. Dann lege man auf die linke Waagschale den zu wägenden Körper der Masse m_K, auf die rechte durch Probieren so viel Massenstücke (immer bei arretierter Waage auflegen!), bis schließlich der Zeiger nach Aufhebung der Arretierung im Bereich der Skala schwingt. Um zu prüfen ob der Zeiger noch zu weit nach einer Seite ausschlägt, genügt es, die Arretierung nur wenig zu lösen. Nach dem ersten rohen Abgleich ergänzt man die Vergleichsmasse m_M durch immer kleinere Massenstücke und setzt schließlich den Reiter so auf, daß der sich einstellende Schwingungsmittelpunkt $B_{\text{wäg}}$ nur wenige Skalenteile vom Nullpunkt A_0 der unbelasteten Waage abweicht. Dann bestimmt man $B_{\text{wäg}}$ im schwingenden Zustand nach 2.2.1.0. Sitzt dabei der Reiter auf dem Teilstrich n des Reiterlineals und hat die Vergleichmasse den Wert m_M, so berechnet sich die gesuchte Masse m_K nach der Gleichung

$$m_K = m_M + n\,\mathrm{mg} + \frac{B_{\text{wäg}} - A_0}{\varepsilon(m_M)} \ . \qquad (2.16)$$

Für $\varepsilon(m_M)$ ist die für diese Belastung gültige Empfindlichkeit einzusetzen, die man bestimmt, indem man den Reiter um eine angemessene Strecke auf dem Reiterlineal verschiebt, den neuen Mittelpunkt $B_{\text{wäg}}$ bestimmt und $\varepsilon(m_M)$ nach Gl. (2.15) berechnet. m_M ermittelt man am besten beim Abnehmen der Massenstücke, indem man die einzelnen Massen untereinander ins Protokollheft schreibt Vor der Addition müssen die einzelnen Werte nach der jedem geeichten Massensatz beigegebenen Korrektionstabelle korrigiert werden. Die Summe der korrigierten Werte ergibt m_M.

2.2.2.2. Korrekturen

Doppelwägung. Vertauscht man den gewogenen Körper mit den Vergleichsmassen und wägt nochmals, erhält man im allgemeinen ein etwas anderes Ergebnis. Das hat seinen Grund in dem immer vorhandenen geringen Längenunterschied der Waagebalken. Allerdings ist die dadurch bedingte Korrektur im allgemeinen gering gegenüber den anderen Korrekturen (Reduktion auf den luftleeren Raum, Korrektionen der Massenstücke). Der Körper habe die Masse m_K, also die

Gewichtskraft $G_K = m_K g$. Liegt er auf der linken Waagschale, so wird die Waage im Gleichgewicht sein, wenn auf der rechten Waagschale die Masse $m_K^{(r)}$ aufgelegt wird, also am rechten Hebelarm l_r die Kraft $G_r = m_K^{(r)} g$ wirkt; liegt er rechts, so wirkt entsprechend am Hebelarm l_l die Kraft $G_l = m_K^{(l)} g$. Im ersten Fall lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$G_K l_l = G_r l_r \text{ bzw. } m_K g l_l = m_K^{(r)} g l_r \text{ bzw. } m_K l_l = m_K^{(r)} l_r \; . \tag{2.17}$$

Im zweiten Fall ist

$$G_K l_r = G_l l_l \text{ bzw. } m_K g l_r = m_K^{(l)} g l_l \text{ bzw. } m_K l_r = m_K^{(l)} l_l \; . \tag{2.18}$$

Durch Multiplikation von Gl. (2.17) mit (2.18) erhält man die Masse des Körpers

$$m_K = \sqrt{m_K^{(r)} m_K^{(l)}} \tag{2.19}$$

als geometrisches Mittel aus den Einzelwägungen rechts und links. Durch Division derselben Gleichungen ergibt sich für das Verhältnis der Längen der Waagearme

$$\frac{l_l}{l_r} = \sqrt{\frac{m_K^{(r)}}{m_K^{(l)}}} \; . \tag{2.20}$$

Bei wenig verschiedenen Größen ist das geometrische Mittel gleich dem arithmetischen, also wird

$$m_K = (m_K^{(l)} + m_K^{(r)})/2 \; . \tag{2.21}$$

Reduktion der Gewichtskraft auf Vakuum. Ein Körper mit dem Volumen V, der von einem Gas oder einer Flüssigkeit der Dichte ϱ umgeben ist, erfährt eine der Schwerkraft entgegengesetzte Kraft, genannt Auftrieb, der Größe

$$A = \varrho V g \; . \tag{2.22}$$

Daher sind die am Waagehebel in A_1 und A_2 (Fig. 2.8) angreifenden Kräfte nicht die wahre Gewichtskraft des Körpers $G_K{}^\circ = m_K g$ und die wahre Gewichtskraft $G_M{}^\circ = m_M g$ der Massenstücke, vielmehr ist $G_K{}^\circ$ um den Auftrieb $A_K = \varrho_L V_K g$ und $G_M{}^\circ$ um den Auftrieb $A_M = \varrho_L V_M g$ verringert; dabei bedeuten ϱ_L die Dichte der Luft und V_K bzw. V_M das Volumen des Körpers bzw. der Massenstücke. Die Gleichgewichtsbedingung (2.9) ist daher entsprechend zu korrigieren, im Gleichgewichtsfall ($\alpha = 0$) ist

$$G_K{}^\circ - V_K \varrho_L g = G_M{}^\circ - V_M \varrho_L g \; . \tag{2.23}$$

Ist die stoffliche Natur des zu wägenden Körpers und der Massenstücke (im allgemeinen Messing, die Bruchgrammstücke spielen bei der Korrektur meist keine Rolle) bekannt, so können V_K und V_M berechnet werden:

$$V_K = \frac{m_K}{\varrho_K} \; ; \quad V_M = \frac{m_M}{\varrho_M} \; . \tag{2.24}$$

Setzt man dies in Gl. (2.23) ein, so resultiert daraus

$$m_K = m_M \frac{1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_M}}{1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_K}} \; . \tag{2.25}$$

Die Verhältnisse der Dichten ϱ_L/ϱ_M und ϱ_L/ϱ_K sind sehr kleine Größen (etwa 10^{-3}), so daß wir nach Gl. (2.25) schreiben können (vgl. 1.3):

$$m_K = m_M \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_M}\right)\left(1 + \frac{\varrho_L}{\varrho_K}\right) = m_M \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_M} + \frac{\varrho_L}{\varrho_K} - \frac{\varrho_L{}^2}{\varrho_K \varrho_M}\right) \; . \tag{2.26}$$

Hierin können wir das quadratische Glied (Größenordnung 10^{-6}) gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigen. Unter Einsetzen von Gl. (2.21) erhalten wir schließlich den korrigierten Wert für die Masse des zu wägenden Körpers aus den Meßwerten $m_K^{(l)}$ und $m_K^{(r)}$ aus der Gleichung

$$m_K = \frac{m_K^{(r)} + m_K^{(l)}}{2} \left(1 - \frac{\varrho_L}{\varrho_M} + \frac{\varrho_L}{\varrho_K}\right) \; . \tag{2.27}$$

2.3. Dichtemessung

2.3.0. Grundlagen

Die Dichte ϱ eines homogenen Körpers mit der Masse m und dem Volumen V ist definiert als das Verhältnis

$$\varrho = \frac{m}{V} \; . \tag{2.28}$$

Eine übliche Einheit der Dichte ist $[\varrho] = \mathrm{g\,cm^{-3}}$. Bei Gasdichten wird häufig die Einheit $[\varrho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$ verwendet. Zur Bestimmung von ϱ ist nach Gl. (2.28) die Messung von m und V erforderlich. Die Masse eines Körpers läßt sich im allgemeinen durch Wägung sehr genau ermitteln. Bei unregelmäßig geformten Körpern ist eine unmittelbare Volumenmessung nicht möglich. Zur mittelbaren Bestimmung von V eignet sich in vielen Fällen der Auftrieb A, den ein Körper erfährt, wenn man ihn in eine Flüssigkeit der Dichte ϱ_{Fl} taucht, und der durch Gl. (2.22) gegeben ist:

$$A = g\,\varrho_{Fl} V \; . \tag{2.29}$$

Andererseits ist der Auftrieb gleich der Differenz der Gewichtskraft $G_K{}^0$ des Körpers im Vakuum und der scheinbaren Gewichtskraft $G_K{}^{Fl}$ des in die Flüssigkeit getauchten Körpers

$$A = G_K{}^0 - G_K{}^{Fl} \; . \tag{2.30}$$

Ersetzt man in Gl. (2.29) das Volumen V des Körpers nach Gl. (2.28) und setzt dann (2.29) gleich (2.30), so ergibt sich

$$\varrho = \varrho_{Fl} \frac{G_K{}^0}{G_K{}^0 - G_K{}^{Fl}} \; . \tag{2.31}$$

Man kann also bei bekannter Dichte ϱ_{Fl} der Flüssigkeit die Dichte ϱ des Körpers bestimmen, wenn man $G_K{}^0$ und $G_K{}^{Fl}$ durch Wägung ermittelt. Ist umgekehrt ϱ bekannt, so kann man aus diesen Meßwerten ϱ_{Fl} bestimmen. Bei nicht zu hohen Genauigkeitsansprüchen genügt es, $G_K{}^0$ durch die in Luft bestimmte

Kraft $G_K{}^L$ zu ersetzen (Größenordnung des relativen Fehlers nach Gl. (2.27) etwa 10^{-3} bis 10^{-4}). Dann wird

$$\varrho = \varrho_{Fl} \frac{G_K{}^L}{G_K{}^L - G_K{}^{Fl}} \quad (2.31\,a)$$

Ein Verfahren zur Bestimmung der relativen Dichte d von Gasen beruht auf kinematischen Überlegungen. In Fig. 2.10a befindet sich im Gefäß G ein Gas unter dem Druck p_i, außerhalb des Gefäßes sei der Druck (desselben oder eines anderen Gases) p_a. Durch die kleine Öffnung in der Wand von G (Querschnitt A) strömt Gas aus, der sich verringernde Druck wird durch Nachschieben des Kolbens K aufrechterhalten (p_i = const).

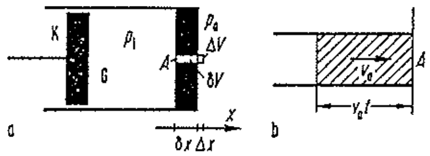


Fig. 2.10 Zur Berechnung der Ausströmung aus einem dünnen Kanal

Wir betrachten das in der röhrenförmigen Wandöffnung befindliche Gasvolumen $\delta V = A\,\delta x$ und verschieben es um die sehr kleine Strecke Δx nach rechts. Auf die linke Stirnfläche von V wirkt die Kraft $F_i = p_i A$, auf die rechte Stirnfläche die Kraft $F_a = p_a A$, insgesamt auf V die resultierende Kraft $F = (p_i - p_a) A$. Daher wird bei der Verschiebung um Δx die Arbeit $\Delta W = F\,\Delta x = (p_i - p_a) A\,\Delta x = (p_i - p_a)\,\Delta V$ verrichtet. Diese Arbeit erhöht die kinetische Energie der in ΔV eingeschlossenen Gasmasse $\Delta m = \varrho\,\Delta V$ um den Betrag $\Delta E_{kin} = \Delta m\,(v_a{}^2 - v_i{}^2)/2$, und da das Gas im Inneren praktisch ruht ($v_i = 0$), folgt aus $\Delta W = \Delta E_{kin}$

$$\frac{\varrho}{2} v_a{}^2 = (p_i - p_a) \ . \quad (2.32)$$

Der Zusammenhang zwischen Ausströmungsgeschwindigkeit v_a und Ausströmungsmenge ergibt sich aus Fig. 2.10 b. In der Zeit t strömt durch A gerade das Volumen (in Fig. 2.10 b schraffiert)

$$V = A\,v_a\,t \ , \quad (2.33)$$

d. h. die Gasstromstärke ist

$$I_{gas} = \frac{V}{t} = A\,v_a \ . \quad (2.34)$$

Setzt man Gl. (2.33) in Gl. (2.32) ein, so erhält man für den Zusammenhang zwischen Gasdichte ϱ und Ausströmungszeit t

$$\varrho = 2\,(p_i - p_a) \frac{A^2}{V^2} t^2 \ . \quad (2.35)$$

Hiermit könnte man bereits die Dichte eines Gases bestimmen, wenn man im Ausströmungsversuch p_i, p_a, A, die ausgeströmte Menge (Volumen) V und die Ausströmungszeit t mißt. Besser eignet sich jedoch das Verfahren für einen Vergleich der Dichte zweier Gase; sind bei beiden Versuchen p_i, p_a, A und V gleich, so ergibt sich aus Gl. (2.35)

$$d = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{t_1{}^2}{t_2{}^2} \ . \quad (2.36)$$

Die Dichte ist eine temperaturabhängige Größe. Ihre Messung hat nur dann einen Sinn, wenn gleichzeitig die Temperatur des Körpers (fest, flüssig, gasförmig) gemessen und angegeben wird.

2.3.1. Hydrostatische Waage

2.3.1.0. Methode. Die zur Anwendung von Gl. (2.31a) notwendige Bestimmung von $G_K{}^L$ und $G_K{}^{Fl}$ kann mit der hydrostatischen Waage durchgeführt werden. Bei dieser ist die eine der beiden Waagschalen einer Analysenwaage durch ein kurzes Gehänge ersetzt, das den zu untersuchenden Körper trägt.

2.3.1.1. Gang des Versuchs. Die Bestimmung von $G_K{}^L$ ist eine normale Wägung (vgl. 2.2). Zur Bestimmung von $G_K{}^{Fl}$ taucht man den Körper vollständig in ein mit Flüssigkeit der Dichte ϱ_{Fl} gefülltes Gefäß und wiederholt die Wägung. Gleichzeitig mißt man die Temperatur der Flüssigkeit. Man achte darauf, daß beim Eintauchen des Körpers in die Flüssigkeit die Temperaturen von beiden etwa gleich sind. Aus $G_K{}^L$, $G_K{}^{Fl}$ und ϱ_{Fl} (bei den gemessenen Temperaturen) gewinnt man nach Gl. (2.31) die Dichte ϱ.

2.3.1.2. Genauigkeit. Da sich Wägungen auch im Praktikum recht genau ausführen lassen, sollte der relative Fehler in der Dichte den Wert $\Delta\varrho/\varrho \approx 10^{-2}$ nicht überschreiten, sofern ϱ_{Fl} mit genügender Genauigkeit bekannt ist. Diese Genauigkeit kann aber nur erreicht werden, wenn alle übrigen Fehlerquellen (Luftbläschen am eingetauchten Körper, Temperaturunterschied zwischen Körper und Wasser) ausgeschaltet werden (vgl. auch 1.2).

2.3.2. Jollysche Federwaage

2.3.2.0. Methode. An Stelle einer hydrostatischen Waage kann man zur Dichtebestimmung die einfachere Federwaage nach Jolly benutzen (Fig. 2.11). An einem Stativ hängt eine lange Schraubenfeder, die an ihrem freien Ende die Marke M trägt. Darunter hängen die beiden Schälchen Sch_1 und Sch_2, von denen das untere beim Meßvorgang in das Gefäß G taucht, das mit einer Flüssigkeit der Dichte ϱ_{Fl} gefüllt ist. Das Gefäß steht auf einem in der Höhe verstellbaren Tisch T. Zur parallaxefreien Ablesung ist am Stativ eine verspiegelte Millimeterskala Sk angebracht. Beim Ab-

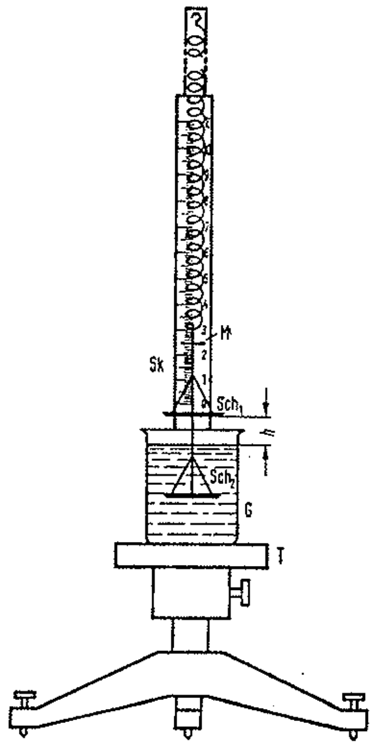


Fig. 2.11 Jollysche Federwaage
T vertikal verstellbarer Tisch; G Gefäß für Flüssigkeit; $Sch_{1,2}$ Schalen; Sk Spiegelskala in Millimeterteilung.

lesen bringe man M mit seinem Spiegelbild zur Deckung und lese dann die jeweilige Stellung S der Marke M auf Sk ab.

Bei einer Wendelfeder ist in gewissen Grenzen die Längenänderung Δl proportional der angreifenden Kraft. Es gilt daher, wenn der Körper auf Sch_1 liegt:

$$G_K{}^L = c(S_2 - S_1) \approx G^0 \ , \tag{2.37}$$

und wenn er auf Sch_2 liegt

$$G_K{}^{Fl} = c(S_3 - S_1) \ . \tag{2.38}$$

Dabei ist c die (unbekannte) Federkonstante. Setzt man (2.37) und (2.38) in (2.31) ein, dann erhält man:

$$\varrho = \varrho_{Fl} \frac{c(S_2 - S_1)}{c(S_2 - S_1) - c(S_3 - S_1)} = \varrho_{Fl} \frac{S_2 - S_1}{S_2 - S_3} \ . \tag{2.39}$$

Das Ergebnis ist unabhängig von c; daher braucht c nicht bekannt zu sein. Es genügt eine ungeeichte Federwaage, deren Linearität jedoch nachzuprüfen ist.

2.3.2.1. Gang des Versuchs und Auswertung. Zur Bestimmung von ϱ sind drei Ablesungen notwendig. 1) Bestimmung des Nullpunkts der Federwaage (unbelasteter Zustand). Dazu hebe man den Tisch so weit, daß die untere Schale vollkommen in der Flüssigkeit hängt, während sich die obere Schale in der Höhe h (einige cm) über der Flüssigkeitsoberfläche befindet. Dann lese man die Stellung S_1 von M ab. — 2) Man senke zunächst den Tisch etwas und lege dann den Körper K auf die obere Schale. Durch vertikale Verschiebung des Tisches, läßt sich h ungefähr wieder einstellen wie unter 1). Dann lese man S_2 ab. — 3) Man lege K auf die untere Schale, stelle durch Heben des Tisches h wieder ein und lese S_3 ab. 4) Man wiederhole die Nullpunktbestimmung. — 5) Man berechne ϱ nach Gl. (2.39). — 6) Man prüfe die Linearität der Federwaage. Dazu entferne man das Gefäß mit der Flüssigkeit und messe Δl in Abhängigkeit von der Masse m, die man auf die obere Schale legt. Der Bereich von Δl soll dem Bereich entsprechen, der bei Dichtemessungen ausgenutzt wird. Eine richtig dimensionierte Feder ergibt im Δl-m-Diagramm eine Gerade. Man zeichne dieses Diagramm.

Anmerkung. Man achte darauf, daß nur der senkrechte Draht der Aufhängung der unteren Schale die Flüssigkeitsoberfläche durchstößt (Oberflächenspannung!). Die gleiche Höhe h bei allen Ablesungen ist nötig wegen des Auftriebs. Man schätze den Einfluß von h auf die Genauigkeit der Messung ab.

2.3.3. Bestimmung der relativen Dichte von Flüssigkeiten

2.3.3.0. Methode und Gang des Versuchs. Wendet man die in 2.3.1 und 2.3.2. besprochenen Verfahren unter Verwendung desselben Probekörpers nacheinander auf zwei verschiedene Flüssigkeiten 1 und 2 an, so sind in Gl. (2.31a) die Größen ϱ und $G_K{}^L$ konstant, also

$$\varrho = \varrho_{Fl,1} \frac{G_K{}^L}{G_K{}^L - G_K{}^{Fl,1}} = \varrho_{Fl,2} \frac{G_K{}^L}{G_K{}^L - G_K{}^{Fl,2}} \ , \tag{2.40}$$

woraus für das Verhältnis der Dichten (relative Dichte) die Gleichung

$$d = \frac{\varrho_{Fl,1}}{\varrho_{Fl,2}} = \frac{G_K{}^L - G_K{}^{Fl,1}}{G_K{}^L - G_K{}^{Fl,2}} \tag{2.41}$$

folgt, welche nur die zwei meßbaren Differenzen $G_K{}^L - G_K{}^{Fl,1}$ und $G_K{}^L - G_K{}^{Fl,2}$ enthält. Zur direkten Messung der relativen Dichte ist eine besondere Ausführungsform der hydrostatischen Waage, die Mohrsche Waage, die in Fig. 2.12 dargestellt ist, besonders geeignet. Auf dem linken Waagarm dieser Waage ist ein verschiebbares Gegengewicht G_g so angebracht, daß die Waage im Gleichgewicht ist, wenn der Auftriebskörper K sich in Luft befindet. Der rechte Waagarm trägt 10 äquidistante Einfräsungen, in die Reiter eingehängt werden können, deren Massen die Werte m, $10\,m$, $100\,m$ und $1000\,m$ betragen, ohne daß jedoch der Massenwert m selbst bekannt zu sein braucht. Senkt man den Auftriebskörper K in eine Flüssigkeit, so wird durch den Auftrieb das Gleichgewicht gestört, durch Auflegen der Reiter kann es wiederhergestellt werden. Die Reiter sind so geformt, daß man sie aneinanderhängen kann (Fig. 2.12), so daß an jeder Dezimalstellung auch mehrere Reiter angebracht werden können. Bezeichnen wir den Ort, an dem ein Reiter mit der Masse $10\,m$ hängt, mit n_{10} (n kann die Werte 1 bis 10 annehmen) und entsprechend die Orte der anderen Reiter, so wird unter Einführung einer Proportionalitätskonstante k der Auftrieb

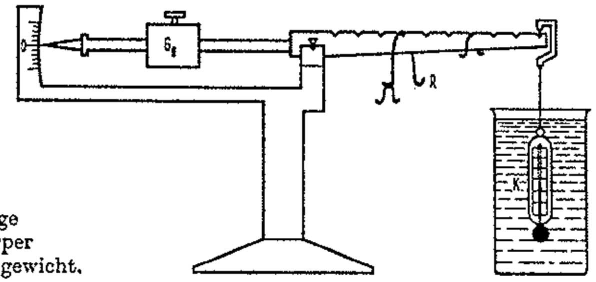


Fig. 2.12 Mohrsche Waage
R Reiter; K Auftriebskörper (Thermometer); G_g Gegengewicht.

$$A = G_K{}^L - G_K{}^{Fl} = k(1n_1 + 10n_{10} + 100n_{100} + 1000n_{1000}) \ . \tag{2.42}$$

Bildet man für zwei Flüssigkeiten (Index 1 und 2) nach Gl. (2.41) das Verhältnis der Auftriebe, so erhält man die relative Dichte

$$d = \frac{n_1{}^{(1)} + 10n_{10}{}^{(1)} + 100n_{100}{}^{(1)} + 1000n_{1000}{}^{(1)}}{n_1{}^{(2)} + 10n_{10}{}^{(2)} + 100n_{100}{}^{(2)} + 1000n_{1000}{}^{(2)}} \ . \tag{2.44}$$

Bei den meisten Ausführungen der Mohrschen Waage wird als Auftriebskörper K ein Thermometer benutzt, so daß die Temperatur der Flüssigkeit direkt abgelesen werden kann. Man vergesse nicht, sie abzulesen.

Anmerkung. Nach Gl. (2.44) ist d unabhängig von m und g. Häufig wird $1000\,m$ gleich dem Auftrieb von K in Wasser der Dichte $\varrho_0 = 1\,\mathrm{g/cm^3}$ gemacht. Dann ergibt eine Messung in der zu messenden Flüssigkeit $d = \varrho/\varrho_0 = (1n_1 + 10n_{10} + 100n_{100} + 1000n_{1000})/1000$.

Beilage 2

4.3.1.2.5. Korrektionen bei Dichtebestimmungen fester und flüssiger Stoffe

Soll die Dichte bis zur 3. oder gar 4. Dezimale richtig sein, so ist sie auf den leeren Raum zu reduzieren (s. 2.1.9).

Bei den pyknometrischen und Auftriebsmethoden ergibt sich die richtige, korrigierte Dichte ϱ aus der Beziehung

$$\varrho = \frac{m}{w}(\varrho_w - \varrho_L) + \varrho_L \quad \text{oder auch} \quad \varrho = \frac{m}{w}\cdot\varrho_w + \left(1 - \frac{m}{w}\right)\varrho_L; \tag{4}$$

darin sind ϱ_w die Dichte des verwendeten Wassers (Tafel A 47), ϱ_L die Dichte der Luft (im allgemeinen genügt der Mittelwert $\varrho_L = 0{,}00120$ g/ml), m das scheinbare Gewicht des festen Körpers oder der Flüssigkeit, wie es sich aus den Wägungen in Luft ergeben hat, und w das scheinbare Gewicht des dem Volumen von m entsprechenden gleichen Volumens Wasser von der Dichte ϱ_w (für feste Körper: der Zahlenwert des beobachteten Gewichtsverlusts des Körpers im Wasser bei den Auftriebsmethoden oder das Gewicht des Wassers, das beim Eindringen des Körpers ins Pyknometer ausfließt; für Flüssigkeiten: der Zahlenwert des beobachteten Gewichts des Wassers im Pyknometer oder des von dem Glaskörper verdrängten Wassers).

Die zweite Form der vorstehenden Gl. (4) zeigt, daß der Einfluß des Luftauftriebs nur verschwindet, wenn die Dichte nahezu 1 ist, z. B. bei verdünnten wässerigen Lösungen.

Wenn die Messungen, die zu einer Dichtebestimmung erforderlich sind, nicht bei derselben Temperatur durchgeführt wurden, ist außerdem noch auf eine bestimmte Temperatur zu reduzieren.

Die Wägung mit bzw. im Wasser sei bei der Temperatur t' ausgeführt und habe für das scheinbare Nettogewicht bzw. den Auftrieb den Zahlenwert w' ergeben. Man sucht aber die entsprechende Größe (w) für die häufig von t' verschiedene Temperatur t, bei der die Wägung mit bzw. in der zu bestimmenden Flüssigkeit (oder etwa nach Einbringen eines festen Körpers ins Pyknometer) ausgeführt wurde. Die Dichten des Wassers bei t' und t seien ϱ'_w und ϱ_w; der kubische Ausdehnungskoeffizient des Gefäßes oder des Senkkörpers sei β (für Glas im Mittel $\beta = 0{,}000025$ grd^{-1}). Dann ist in praktisch ausreichender Näherung

$$w = w'[1 + \beta(t - t')]\varrho_w/\varrho'_w. \tag{5}$$

Das w aus der Gl. (5) ist in Gl. (4) einzusetzen.

Besonders bei der Dichtebestimmung fester Körper mit einem relativ großen Pyknometer dürfen diese Korrektionen nicht übersehen werden.

Vgl. auch DIN 51757 (Bestimmung der Dichte von Mineralölen und verwandten Stoffen).

4.3.1.3. Dichte von Flüssigkeiten

Über die Korrektionen auf den leeren Raum vgl. 4.3.1.2.5.
Schoeneck, ATM V 9121-2, Juni 1956.

4.3.1.3.1. Wägemethoden

Meßkolben, Meßzylinder, Pipetten, Büretten. Meßkolben oder -flaschen fassen bis zu einer kreisförmigen Marke am Halse den angegebenen Inhalt. Gewöhnlich ist der Fehler bei geeichten Gefäßen kleiner als 0,5‰. Meßzylinder, die wegen der viel unschärferen Ablesung an der breiten Oberfläche nicht als eigentliche Meßinstrumente dienen sollten, sind nur zu rohen Bestimmungen (einige Prozent Unsicherheit) geeignet.

Für schnelle Messungen von mäßiger Genauigkeit dienen bei kleinen Flüssigkeitsmengen trocken oder auf Ausfluß geeichte Pipetten, deren untere Enden mit einer hin-

(3)

Beilage 3

T a b e l l e .

Temperatur $\vartheta^0 C$	Dichte d_w des destill. Wassers in g/cm^3
0	0,99984
4	0,999972
10	0,99970
11	0,99960
12	0,99950
13	0,99938
14	0,99924
15	0,99910
16	0,99894
17	0,99877
18	0,99859
19	0,99840
20	0,99820
21	0,99799
22	0,99777
23	0,99754
24	0,99730
25	0,99705
26	0,99678
27	0,99651
28	0,99623
29	0,99594
30	0,99564
31	0,99534
32	0,99502

Physik | Chemie · Biologie | Technik

LEYBOLD

Beilage 4

LEYBOLD DIDACTIC GMBH

4/1988

Gebrauchsanweisung
Instruction Sheet

316 72

Pyknometer nach Gay-Lussac

Specific gravity bottle, Gay-Lussac design

1 Beschreibung

Das Pyknometer dient zur Dichte- und Volumenbestimmung von Flüssigkeiten. Es ist ein birnenförmiges Glasgefäß mit ca. 50 ml Inhalt, mit eingeschliffenem, der Länge nach durchbohrtem Stopfen.

2 Versuch

Dichtebestimmung einer Flssügkeit:
Die leere Glasflasche (m_1) mit Stöpsel wird gewogen, z.B. mit der Schul- und Laborwaage 311 (315 05). Es ist darauf zu achten, daß die Flasche vollkommen trocken ist. Danach füllt man die Flasche mit der Flüssigkeit ganz bis zum Rand und setzt den Stöpsel so weit ein, daß sich keine Luftblase zwischen Stöpselunterseite und Flüssigkeit befindet. Die überschüssige Flüssigkeit tritt durch die Kapillare des Stölpsels heraus. Die Flasche und der herausragende Teil des Stöpsels sind gut zu trocknen. Dann wägt man die Flasche mit der Flüssigkeit (m_2).

Aus der Differenz m_2-m_1 wird die Masse (m) der Flüssigkeit bestimmt. Man wiederholt die Wägung mit destilliertem Wasser (m_3). Die Differenz m_3-m_1 ergibt die Masse des Wassers, aus der auch das genaue Volumen des Pyknometers abgeleitet werden kann, wenn man die von der Wassertemperatur abhängige Dichte ρ_W des Wassers berücksichtigt. Die Dichte ρ_F der Flüssigkeit ist dann

$$\rho_F = \rho_W \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$$

3 Hinweise

Damit die Volumenbestimmung mit destilliertem Wasser einer definierten, bekannten Temperatur erfolgen kann, stellt man das gefüllte Pyknometer für einige Zeit in einem Wasserbad bekannter Temperatur auf.

Das Pyknometer muß sehr sauber gehalten werden. Zur Reinigung des Gefäßes verwendet man zweckmäßigerweise destilliertes Wasser.

1 Description

The specific gravity bottle is used to measure the volume and the density of a liquid. It is a pear-shaped glass vessel holding about 50 ml and has a ground-in stopper with a capillary hole along its axis.

2 Experiments

Procedure for determining the density of a liquid:
Weigh the empty bottle (m_1) with its stopper, using e.g. the laboratory balance for schools 311 (315 05). For this the bottle must be completely dry. Then fill the bottle with the liquid under test and put in the stopper, so that no air bubble is left between the lower surface of the stopper and the liquid surface. Any surplus liquid will escape through the capillary bore of the stopper. Completely dry the outside of the bottle and the protruding part of the stopper. Now weigh the bottle with contents (m_2).

The difference m_2-m_1 is the mass (m) of the liquid. Repeat the procedure with distilled water (m_3). The difference m_3-m_1 is the mass of the water. From the exact volume of the specific gravity bottle may be computed if the temperature of the water is known and its density ρ_W at this temperature is considered. This gives for the density ρ_F of the liquid

$$\rho_F = \rho_W \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$$

3 Please note

For the determination of the volume of the specific gravity bottle using distilled water of a known, defined temperature, the bottle should be filled with water and should then be kept for some time in a water bath of known temperature.

The specific gravity bottle must be kept very clean. Only distilled water should be used for rinsing.

LEYBOLD DIDACTIC GMBH · Leybold-Heraeus-Str.1 · Postfach 1365 · 5030 Hürth · Telefon (02233) 604-0 · Telefax (02233) 604-222 · Telelex 223332 LHPCGN

Printed in the Federal Republic of Germany

Durchschnitt den Wert $\sqrt{0{,}03}\,\% \approx \pm 0{,}17\,\%$. Mit jedem weiteren Glied wächst der Fehler. Man muß daher auf Grund der angestrebten bzw. mit den benutzten Hilfsmitteln erzielbaren Meßgenauigkeit in jedem Fall erwägen, ob die Benutzung des Rechenstabes mit der Meßgenauigkeit noch vereinbar ist oder ob man das unmittelbare Rechenverfahren oder die Logarithmentafel benutzen muß. Eine endgültige Entscheidung darüber kann oft erst die Fehlerrechnung liefern. Man wird häufig eine zunächst mit dem Rechenstab ausgeführte Rechnung mit einem genaueren Verfahren wiederholen müssen.

7. Rechnen mit kleinen Größen. Kürzungsregeln

Es kommt häufig vor – vor allem bei kleinen Korrektionen –, daß von den zwei Gliedern einer Summe das eine viel kleiner ist als das andere. Dann kann man oft die höheren Potenzen dieser kleinen Größe vernachlässigen. Das gleiche gilt für die Produkte solcher kleiner Größen, wenn derartige Summen miteinander multipliziert werden. Man kann eine solche Summe immer auf die Form $A\,(1+z)$ bringen, mit $z \ll 1$. Besonders wichtig sind die folgenden Näherungen:

$$(1 \pm z)^n \approx 1 \pm nz \quad \text{mit} \quad n \gtreqless 0, \tag{1}$$

$$(1 \pm z_1)(1 \pm z_2) \approx 1 \pm z_1 \pm z_2. \tag{2}$$

(1) gilt nicht nur für ganzzahlige, sondern auch für gebrochene Exponenten.
Beispiele. 1. Ein Zahlenwert 1,2376 sei mit dem Faktor $1{,}0003^2$ zu korrigieren. Dann ergibt eine einfache Kopfrechnung:

$$1{,}2376\,(1+0{,}0003)^2 \approx 1{,}2376\,(1+0{,}0006) = 1{,}2376 + 0{,}0008 = 1{,}2384\,.$$

2. Bei der absoluten Wägung eines Körpers ist das geometrische Mittel zweier Massen m_r und m_l zu bilden, die sich relativ nur sehr wenig unterscheiden, so daß $(m_r - m_l)/m_r \ll 1$. Demnach ist

$$\sqrt{m_r m_l} = \sqrt{m_r\,[m_r - (m_r - m_l)]} = m_r \sqrt{1 - \frac{m_r - m_l}{m_r}}$$

$$\approx m_r\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{m_r - m_l}{m_r}\right) = \frac{m_r + m_l}{2}\,.$$

Das ist der bekannte Satz, daß man das geometrische Mittel zweier relativ wenig verschiedener Größen näherungsweise durch ihr arithmetisches Mittel ersetzen darf.
Sehr oft hat man es in der Physik mit sehr kleinen Winkeln zu tun. Ist $\varphi \ll 1$, so gelten die Näherungen

$$\sin\varphi \approx \tan\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1\,.$$

Beilage 5

8. Fehlerquellen

Keine physikalische Messung kann je einen absolut exakten Zahlenwert einer physikalischen Größe ergeben (der genau genommen in der Regel unendlich viele Stellen haben würde). Das übersteigt die Möglichkeiten der Meßtechnik. Wenn wir weiterhin von dem *„wahren" Wert* einer Größe sprechen werden, so ist das immer nur in dem Sinne einer Abstraktion zu verstehen. Auch der mit den vollkommensten Mitteln der jeweiligen Meßtechnik erhaltene Zahlenwert muß demnach noch immer mit einem gewissen, wenn auch oft sehr kleinen *Fehler* behaftet sein. Aber der wirkliche Fehler eines Messungsergebnisses wird diese Fehlergrenze stets überschreiten, und zwar aus zwei ganz verschiedenen Gründen.

Einmal ist es – von ganz seltenen Ausnahmefällen abgesehen – praktisch unmöglich, für den allgemeinen Gebrauch (insbesondere auch im physikalischen Praktikum) Meßgeräte zur Verfügung zu stellen, deren Genauigkeit (Eichung) bis zur Grenze der jeweiligen Möglichkeiten gewährleistet ist. Selbst wenn es möglich wäre, sie absolut exakt abzulesen, wäre das Ergebnis noch mit einem Fehler behaftet. Fehler dieser Art, die durch die Unvollkommenheit der Meßmittel in das Ergebnis hineingetragen werden, heißen *systematische Fehler.* Ihre Hauptursachen sind fehlerhafte Eichungen oder innere Fehler des Meßgerätes. Sind z. B. alle Skalenteile eines Maßstabes zu groß oder zu klein, so mißt man mit ihm Längen zu klein oder zu groß. Noch schlimmer ist es, wenn die einzelnen Skalenteile verschieden groß sind. Oder die Skala eines Strommessers ist linear geteilt, weil man voraussetzt, daß sein Ausschlag der Stromstärke proportional ist; aber das ist oft nicht genau der Fall. Man kann grundsätzlich die systematischen Fehler auf das durch die Grenzen der jeweiligen Meßtechnik gesetzte Minimum herabdrücken, indem man das fehlerhafte Meßgerät so genau wie möglich eicht und die fehlerhaften Messungen entsprechend korrigiert. Aber in der Praxis ist das nur selten möglich, und schon gar nicht im physikalischen Praktikum. Bei der Beurteilung der Genauigkeit unsrer Messungen können wir daher die sicher stets vorhandenen systematischen Fehler nicht in Rechnung setzen.

Von ganz anderer Art sind die *zufälligen Fehler.* Eine ihrer wesentlichen Ursachen liegt in der Person des Beobachters selbst, vor allem in dem begrenzten Unterscheidungsvermögen seines *Auges* bei Ablesungen, gelegentlich auch seines *Ohres* beim Abhören, und in den Grenzen der Geschicklichkeit seiner *Hand* bei Einstellungen. Bei der Messung der Länge einer Strecke mit einem Maßstab setzen erstens die Augenschärfe und die Handgeschicklichkeit der Einstellung des Maßstabanfangs an den Streckenanfang eine Genauigkeitsgrenze. Zweitens begrenzt die Augenschärfe auch die Genauigkeit der Ablesung des Ortes des Streckenendes am Maßstab. Daher wird eine mehrfach wiederholte Messung der Streckenlänge nicht immer genau das gleiche Ergebnis liefern. Manchmal werden die an den beiden Enden gemachten kleinen Fehler *zufällig* gleichsinnig auf das Ergebnis einwirken, es also beide vergrößern oder verkleinern; manchmal werden sie einander *zufällig* entgegenwirken und zu einem mehr oder weniger großen Teil aufheben. Die Einzelergebnisse einer Meßreihe werden also eine *Streuung um einen mittleren Wert* zeigen. Abb. 1 zeigt dies am Beispiel der in § 10 abgedruckten Meßtabelle. Die Einzelmessungen sind in der Umgebung des Mittelwertes gehäuft und werden in größerem Abstande von ihm immer spärlicher. (Den genauen Ausdruck für eine unendlich große Zahl von Einzelmessungen liefert das Fehlerverteilungsgesetz von *Gauß*.) Wenn man systematische Fehler ausschließt, so kann man zunächst nur sagen, daß der wahre Wert der zu messenden Größe mit großer Wahrscheinlichkeit innerhalb des Streubereichs, und zwar im Bereich der stärksten Häufung der Einzelmessungen liegt. Nehmen wir aus den Einzelmessungen den Mittelwert, so ist das natürlich nie genau der wahre Wert der zu messenden Größe. Jede zusätzliche Einzelmessung wird ja auch meist den Mittelwert etwas verändern, wenn auch um so weniger, je mehr Einzelmessungen bereits vorliegen. Es bleibt also immer eine Unsicherheit darüber bestehen, um wieviel der Mittelwert vom wahren Wert abweicht. Die *Fehlerrechnung* dient dazu, den Grad dieser Unsicherheit abzuschätzen.

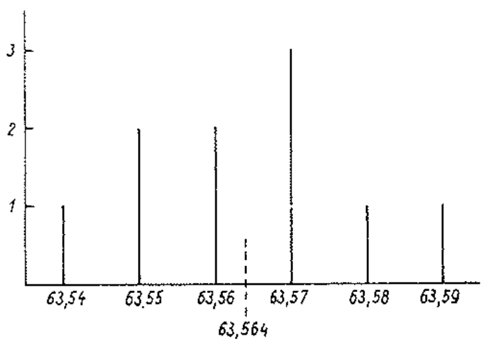


Abb. 1. Streuung der Zahlenwerte von 10 Einzelmessungen um den Mittelwert 63,564

Da es sich hier nur um die zufälligen Fehler handelt, so ist es grundsätzlich unmöglich, zu entscheiden, ob der Mittelwert unserer Einzelmessungen vom wahren Wert nach oben oder unten abweicht. Daher ist der zufällige Fehler eines Ergebnisses durch das *unbestimmte Vorzeichen* ± zu kennzeichnen.

Unsere Fehlerrechnungen können sich nach unseren obigen Ausführungen nur auf die von dem Studenten selbst gemessenen Größen erstrecken. Vorgegebene Eichungen von Meßgeräten, ferner Zahlenwerte, die aus anderen Quellen stammen, kann er der Fehlerrechnung nicht unterwerfen. Es ist mißlich, daß infolgedessen die von uns berechneten Fehler in der Regel mehr oder minder kleiner ausfallen werden, als sie tatsächlich sind. Das läßt sich nicht vermeiden, wenn wir im Praktikum überhaupt Fehlerrechnung

treiben wollen. Es ist aber nötig, daß der Student sich dieser Einschränkung stets bewußt bleibt[1]).

9. Der Zweck der Fehlerrechnung

Das Vertrauen, das wir in das Ergebnis einer Messung setzen, hängt davon ab, welche Abweichung des Ergebnisses vom wahren Wert wir unter den gegebenen Umständen für denkbar halten. Sehen wir wieder von systematischen Fehlern ab, so liefert uns die Streuung der Einzelergebnisse um ihren Mittelwert ein Mittel zur Urteilsbildung. Hat z. B. von zwei Beobachtern der eine bei 10 Einzelmessungen für eine Länge Werte zwischen 63,71 cm und 63,83 cm mit dem Mittelwert 63,77 cm erhalten, der andere Werte zwischen 63,74 und 63,78 mit dem Mittelwert 63,76, so wird man das Ergebnis des zweiten für zuverlässiger halten als das des ersten. Denn die größten Abweichungen vom Mittelwert betragen beim ersten ± 0,06 cm, beim zweiten aber nur ± 0,02 cm.

Es ist natürlich *denkbar* – vor allem bei sehr kleiner Zahl von Einzelmessungen –, daß der wahre Wert zufällig in der Nähe einer der Grenzen des Streugebietes oder gar noch außerhalb desselben liegt. Es ist aber bei Ausschluß systematischer Fehler *sehr wenig wahrscheinlich*. Wenn nur zufällige Fehler im Spiel sind, so wird ein vom wahren Wert stark abweichendes Einzelergebnis seltener vorkommen als ein nur wenig von ihm abweichendes. Liegt also eine größere Zahl von Einzelmessungen der gleichen Größe vor, die unter gleichen Bedingungen gemacht wurden, so wird man erwarten, daß ihre Ergebnisse um einen mittleren Wert gehäuft sind (Abb. 1) und daß der wahre Wert irgendwo innerhalb dieses Häufungsbereichs liegt, vermutlich nahe bei dessen Schwerpunkt. Man wird als Ergebnis einen Wert innerhalb dieses Häufungsbereichs angeben, aber dessen gewiß sein, daß er vom wahren Wert um einen gewissen Betrag abweicht, der nun aber *wahrscheinlich* kleiner als die größte überhaupt vorkommende Abweichung ist.

Dieser Urteilsbildung dient die *Fehlerrechnung*. Manchmal empfiehlt es sich, den *Ansatz* für die Fehlerrechnung schon vor der Ausführung der Messungen zu machen, da er oft wichtige Fingerzeige dafür gibt, bei welchen Teilen der Messung besondere Sorgfalt geboten ist (vgl. die 9. Aufgabe). In jedem Fall hat die Fehlerrechnung den wichtigen Zweck, daß sie den Studenten vor einer *Überschätzung*, aber auch vor einer *Unterschätzung* seiner Leistung

[1]) Natürlich kann man sich bei einiger Erfahrung aufgrund der Art der verwendeten Meßmittel eine gewisse Meinung über die Größe denkbarer *systematischer* Fehler bilden, wenn auch nicht über ihre Vorzeichen. Man kann sie dann abschätzen und in die Fehlerrechnung einbeziehen. Einem Anfänger fehlt aber eine solche Erfahrung.

bewahren und ihn zur Kritik erziehen soll. Wenn aber in der Praxis ein Meßergebnis später weiter verwendet werden soll, muß man wissen, innerhalb welcher Grenzen man sich auf seine Richtigkeit verlassen kann. Deshalb liefert erst die zusätzliche Angabe des wahrscheinlichen Fehlers die vollständige Information über das Meßergebnis. Wir werden nur in einigen besonders begründeten Fällen auf eine Fehlerrechnung verzichten.

Wir teilen hier nur diejenigen Ergebnisse der Fehlertheorie mit, von denen wir in diesem Buch Gebrauch machen wollen, ohne sie zu begründen. Die Beweise findet der Leser im Anhang III.

10. Bestwert und mittlerer Fehler

Welchen Wert innerhalb des Streubereichs der Einzelwerte soll man nun als den *zuverlässigsten* oder *Bestwert* der Meßgröße betrachten, d. h. als denjenigen, der ihrem wahren Wert wahrscheinlich besonders nahe kommt? Eine beweisbare Antwort auf diese Frage gibt es nicht; das einzig Mögliche ist, daß man ein Berechnungsprinzip postuliert, das in seinem Ergebnis zwar nicht notwendig, aber einleuchtend ist. Nach Gauß gilt als Bestwert derjenige Wert, der die Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelwerte zu einem Minimum macht (*Methode der kleinsten Quadrate*). Wie im Anhang III bewiesen ist, auf den wir auch für das Folgende hinweisen, wird diese Bedingung bei n unter gleichen Bedingungen gewonnenen Einzelwerten $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ durch das arithmetische Mittel

$$x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n} [x] \qquad (1)$$

erfüllt. $[x]$ ist das in der Fehlertheorie übliche Formelzeichen für die Summe über alle Einzelwerte x_k, entsprechend auch in anderen Fällen. Es seien $v_k = x - x_k$ die teils positiven, teils negativen Abweichungen der ja im allgemeinen ein wenig verschiedenen Einzelwerte x_k vom Bestwert x, die Fehler der Einzelwerte. Dann folgt aus (1) leicht, daß $\Sigma v_k = [v] = 0$. Als *mittleren quadratischen* oder einfach *mittleren Fehler der Einzelwerte* x_k ergibt die Theorie

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \qquad (2a)$$

und als *Fehler des Mittelwertes* x

$$\Delta x = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}. \qquad (2b)$$

Dabei ist $[vv] = \Sigma v_k^2$. Der Fehler des Mittelwertes ist selbstverständlich kleiner als der mittlere Fehler der Einzelwerte, und zwar um den Faktor $1/\sqrt{n}$.

Bei der numerischen Berechnung der Wurzeln ist das Ergebnis stets mit dem *unbestimmten Vorzeichen* $\pm$ zu versehen; denn es bleibt ja bei einem zufälligen Fehler ganz offen, ob er positiv oder negativ ist, während bei einem systematischen Fehler das Vorzeichen wenigstens prinzipiell feststellbar ist.

Ein Beispiel zeigt die Tabelle 3. Eine Länge ist 10mal gemessen worden ($n = 10$), und der Mittelwert beträgt $x = 63{,}564$ cm. (Vgl. § 8, Abb. 1.) Unter $v \cdot 10^3$ sind die mit 10^3 multiplizierten Abweichungen der Einzelmessungen vom Mittelwert, unter $v^2 \cdot 10^6$ deren Quadrate angegeben. Ihre Summe beträgt $[vv] = 2040 \cdot 10^{-6}$ cm². (Der Einfachheit halber geben wir künftig in Tabellen nur die Zahlenwerte von v, v^2 und $[vv]$ an.) Der mittlere Fehler der Einzelmessungen beträgt also

$$\mu = \sqrt{\frac{2040}{9}} \cdot 10^{-3} \approx \pm 0{,}01505 \text{ cm}$$

und der Fehler des Ergebnisses

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2040}{10 \cdot 9}} \cdot 10^{-3} = \pm 0{,}00476 \text{ cm.}$$

Tabelle 3

x cm	$v \cdot 10^3$ cm	$v^2 \cdot 10^6$ cm²
63,57	+ 6	36
58	+ 16	256
55	− 14	196
56	− 4	16
56	− 4	16
59	+ 26	676
55	− 14	196
54	− 24	576
57	+ 6	36
57	+ 6	36
63,564	$[vv] \cdot 10^6 = 2040$ cm²	

Die Ergebnisse von Fehlerrechnungen sind aber nie als exakte Ergebnisse zu werten, weil sie ja nur auf Wahrscheinlichkeitsannahmen beruhen. Sie können stets nur ein *der Größenordnung nach* zutreffendes Urteil über die Zuverlässigkeit einer Messung ermöglichen. Darum hat eine so genaue Fehlerangabe, wie wir sie soeben gemacht haben, keinen Sinn. *Fehler werden immer nur in runden Zahlen, mit höchstens 2 zählenden Stellen, angegeben* und im Zweifelsfall *stets nach oben gerundet.* Darum runden wir unsere oben berechneten Fehler auf $\mu = \pm 0{,}015$ cm und $\Delta x = \pm 0{,}005$ cm. Auch den Mittelwert wird man häufig auf Grund der Fehlerrechnung runden. Es hat keinen Sinn, Stellen anzugeben, die bereits völlig unsicher sind, sondern man gibt außer den auf Grund der Fehlerrechnung als zuverlässig erkannten Stellen nur noch die erste unsichere Stelle an. *Die Angabe einer zu großen Stellenzahl ist ein Zeichen mangelnder Kritik.* Als Endergebnis unserer Messungen geben wir an:

$$x = (63{,}564 \pm 0{,}005) \text{ cm.}$$

Mit jedem Einzelwert, der zu bereits vorhandenen Einzelwerten hinzukommt, ändert sich im allgemeinen der Mittelwert, aber um so weniger, je mehr Einzelwerte bereits vorhanden waren. Er führt immer kleiner werdende, unregelmäßige Oszillationen um einen Endwert aus, dem er sich mit $n \to \infty$ asymptotisch nähert. Es läßt sich leicht zeigen, daß, wenn man statt n Messungen deren zn ausführt und n nicht allzu klein ist, der Fehler des Mittelwertes nur etwa um den Faktor $1/\sqrt{z}$ kleiner wird. Wenn man also statt 10 Einzelmessungen deren 100 anstellt, so drückt man dadurch den mittleren Fehler des Ergebnisses nicht etwa auf $1/10$, sondern nur auf etwa $1/\sqrt{10} \approx 1/3$ herab. Dies zeigt den bedingten Wert einer allzu großen Vermehrung der Zahl der Einzelmessungen, die sehr oft den Aufwand an Zeit nicht lohnen wird.

Der von uns bisher behandelte Fehler heißt der *absolute Fehler* des Ergebnisses. Er liefert aber noch kein ganz deutliches Bild von der Güte der Meßleistung, denn es ist ein sehr großer Unterschied, ob ich z. B. eine Länge von 1 cm oder eine solche von 1000 cm mit einem Fehler von $\pm$ 0,1 cm messe. Im ersten Fall beträgt der Fehler $\pm 1/10 = \pm 10\,\%$ des Ergebnisses, im zweiten Fall nur $\pm 1/10000 = \pm 0{,}01\,\%$, und man wird die zweite Messung erheblich höher werten als die erste. Man sieht, daß es ganz wesentlich auf das *Verhältnis des Fehlers zum Ergebnis*, auf den *relativen Fehler* $\Delta x/x$, ankommt. Es ist üblich, den relativen Fehler in % anzugeben. Auch er wird stets *auf höchstens 2 zählende Stellen gerundet*, und zwar im Zweifelsfalle stets nach oben. Einen berechneten Fehler von $\pm$ 1,1 % kann man natürlich getrost auf $\pm$ 1 % abrunden; bei $\pm$ 1,2 % wird man sich schon überlegen, ob man nicht vorsichtig auf $\pm$ 1,5 % aufrundet. Der relative Fehler ist unabhängig von der gewählten Einheit, da sie sich heraushebt.

Bei unserer obigen Längenmessung beträgt der relative Fehler

$$\Delta x/x = \pm 0{,}005/63{,}564 = \pm 0{,}000\,078\,5 \approx \pm 0{,}000\,08 = \pm 0{,}008\,\%.$$

Den Fehler von Größen, die nur ein einziges Mal gemessen wurden, kann man natürlich nur abschätzen. So wird man bei einmaligen Ablesungen an einer Skala sehr oft den Fehler auf $\pm$ 0,1 Skalenteil schätzen dürfen.

11. Der Fehler eines zusammengesetzten Ergebnisses

Bei den meisten physikalischen Messungen handelt es sich um die Ermittlung von Größen, die aus einer oder mehreren unmittelbar gemessenen Größen berechnet werden müssen, um ein *zusammengesetztes Ergebnis*. So erfordert die Messung des Elastizitätsmoduls aus der Biegung (2. Aufgabe) vier Längenmessungen: ein Schneidenabstand, die Dicke und die Breite einer Platte und ihre Durchbiegung unter der Wirkung einer Kraft. Jedes dieser unabhängigen Messungsergebnisse ist mit einem Fehler behaftet, den es in die Berechnung hineinträgt und mit dem es das Endergebnis infiziert. Es entsteht also die Aufgabe, zu berechnen, welchen Beitrag jeder Einzelfehler zum Fehler des Ergebnisses liefert.

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, daß in die Berechnung des Endergebnisses nur eine Potenz einer einzigen unmittelbar gemessenen

Größe x eingeht, die mit einem Fehler Δx behaftet ist. Wir bezeichnen das Endergebnis mit R. Dann ist R eine Funktion $R\,(x)$ von x. Für genügend kleines Δx folgt aus dem *Taylor*schen Satz unter Vernachlässigung höherer Potenzen von Δx als *absoluter Fehler* von R

$$\Delta R = \frac{dR}{dx}\,\Delta x\,. \tag{1}$$

Ist z. B. $R = Ax^b$ und A eine als fehlerfrei anzusehende Konstante, so ergibt sich $\Delta R = Ab\,x^{b-1}\,\Delta x$.

Den *relativen Fehler* $\Delta R/R$ kann man dann aus ΔR und R berechnen. In den meisten Fällen ist er aber leichter zu berechnen als der absolute Fehler, den man dann als $R \cdot \Delta R/R$ berechnet. Wenn wieder $R = Ax^b$ ist, so ist $\ln R = \ln A + b \ln x$ und (da A und b Konstante sind) $\Delta \ln R = b\,\Delta \ln x$. Nach dem *Taylor*schen Satz ist $\Delta \ln R = \Delta R/R$ und $\Delta \ln x = \Delta x/x$, so daß

$$\frac{\Delta R}{R} = b\,\frac{\Delta x}{x}\,. \tag{2}$$

Der relative Fehler von R ist also gleich dem mit dem Exponenten b von x multiplizierten relativen Fehler von x. Da er bei der Auswertung mit dem Zeichen $\pm$ zu versehen ist, so ist er vom Vorzeichen von b unabhängig.

Weit häufiger aber gehen in ein zusammengesetztes Ergebnis mehrere unmittelbar gemessene Größen ein, so daß $R = R\,(x, y, z, \ldots)$. In diesem Fall wird es natürlich häufig vorkommen, daß die Fehler, die die einzelnen Größen in das Ergebnis einbringen, einander in ihrem Einfluß auf das Ergebnis zufällig mehr oder minder entgegenwirken. Es kann aber auch vorkommen, daß sie zufällig alle gleichsinnig wirken. Ob das eine oder andere im Einzelfall wirklich eingetreten ist, kann man wegen des unbestimmten Vorzeichens der Fehler nie wissen. Will man sehr vorsichtig vorgehen, so wird man den ungünstigsten Fall annehmen, daß alle Fehler gleichsinnig wirken. In diesem Fall folgt aus dem *Taylor*schen Satz, analog zu (1),

$$\Delta R = \left|\frac{\partial R}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial R}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial R}{\partial z}\right| \Delta z + \ldots \tag{3}$$

Hier sind also die absoluten Beträge $|\partial R/\partial x|$ usw. der partiellen Differentialquotienten von R nach $x, y, z, \ldots$ einzusetzen, so daß die Faktoren von $\Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots$ *sämtlich positiv* sind. Bei der numerischen Berechnung ist die rechte Seite von (3) in Klammern zu setzen und mit dem Vorzeichen $\pm$ zu versehen. Auf diese Weise erhält man den *absoluten Größtfehler* des Ergebnisses.

Ist R ein Potenzprodukt, $R = A x^a y^b z^c \ldots$, so erhält man den *relativen Größtfehler* von R, analog zu (2), aus der Gleichung

$$\frac{\Delta R}{R} = |a| \frac{\Delta x}{x} + |b| \frac{\Delta y}{y} + |c| \frac{\Delta z}{z} + \cdots \tag{4}$$

In diese Gleichung sind die Exponenten $a, b, c, \ldots$ mit ihren absoluten Beträgen $|a|, |b|, |c|, \ldots$, also *sämtlich positiv* einzusetzen. Der relative Größtfehler eines Potenzprodukts ist also gleich der Summe der mit den absoluten Beträgen der betreffenden Exponenten multiplizierten relativen Fehler der in die Rechnung eingehenden Einzelgrößen.

Wir werden in der Mehrzahl der Fälle zunächst den relativen Größtfehler nach (4) berechnen. Es wird gelegentlich vorkommen, daß eine der hier mit $x, y, z, \ldots$ bezeichneten Größen selbst schon ein zusammengesetztes Ergebnis ist, z. B. die Differenz zweier Längen oder Temperaturen. In solchen Fällen ist der relative Fehler einer solchen Größe besonders zu berechnen und in (4) einzusetzen.

Stellt man in Rechnung, daß eine gewisse Wahrscheinlichkeit für einen teilweisen gegenseitigen Ausgleich der Fehler der einzelnen Größen besteht, so liefert die Theorie für den *mittleren absoluten Fehler* des Ergebnisses die Gleichung

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \Delta z\right)^2 + \cdots} \tag{5}$$

(*Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz*). Der *mittlere relative Fehler* des Ergebnisses beträgt bei einem *Potenzprodukt* (s. o.)

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(a \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(b \frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(c \frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \cdots}. \tag{6}$$

Wir werden aber das Fehlerfortpflanzungsgesetz nur in Ausnahmefällen anwenden und sonst zur Vereinfachung der Rechenarbeit (3) oder (4) benutzen. Daß das größere Fehler liefert als (5) und (6), schafft einen gewissen Ausgleich dafür, daß wir manche im Rahmen unsrer Messungen nicht kontrollierbare Fehler nicht berücksichtigen können, und bewahrt uns bis zu einem gewissen Grade von einer Überschätzung der Genauigkeit unsrer Ergebnisse.

Man kann eine Fehlerrechnung manchmal vereinfachen, wenn ein Glied eine Variable enthält, die dessen Betrag nur relativ wenig beeinflußt. Dann ist es meist zulässig, dieses Glied als fehlerfrei zu behandeln. Das gilt u. a. für Korrektionsfaktoren von der Form $(1 + z)$, wobei z relativ klein gegen 1 und z eine Funktion einer oder mehrerer Variabeln ist. Einen solchen Faktor kann man bei der Fehlerrechnung unberücksichtigt lassen.

12. Auswertung von Meßreihen

Sehr oft ist eine gemessene Größe y eine lineare Funktion

$$y = A + Bx \tag{1}$$

einer willkürlich veränderlichen Größe x, wobei A und B Konstante sind. Der Zweck der Messung ist dann stets, die Konstante $B = dy/dx$, das Steigungsmaß der Geraden, die y als Funktion von x darstellt, zu ermitteln. In manchen Fällen ist auch die Kenntnis von A erforderlich. Zur Berechnung von A und B genügen zwei Wertepaare (x, y). Meist wird aber eine größere *Meßreihe* mit n Wertepaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k), \ldots, (x_n, y_n)$ vorliegen. Kombiniert man je zwei von ihnen, so wird man wegen der unvermeidlichen Meßfehler jeweils etwas verschiedene Werte erhalten, und es handelt sich dann darum, die *Bestwerte* von A und B zu finden, also diejenigen, die sich im Durchschnitt den Messungen am besten anpassen. Mit ihrer Hilfe kann man dann auch in einer graphischen Darstellung von y als Funktion von x die der Gleichung (1) entsprechende *ausgleichende Gerade* zeichnen (wie man sie weniger genau auch nach Augenmaß durch die Meßpunkte hindurchlegen kann). Wir wollen zwei Verfahren zur Berechnung von A und B mitteilen.

I. Verfahren bei ungleichen Intervallen. Hat man x nicht in gleichen Schritten verändert (siehe II.), so faßt man je zwei Wertepaare (x_l, y_l) und (x_m, y_m) zusammen und berechnet B-Werte nach der aus (1) folgenden Gleichung

$$B = \frac{y_m - y_l}{x_m - x_l} = \frac{\text{Diff. } y}{\text{Diff. } x}, \tag{2}$$

indem man die Meßreihe in eine obere und eine untere Häfte teilt und z. B. bei $n = 10$ Messungen das 1. mit dem 6., das 2. mit dem 7. Wertepaar usw. kombiniert. Von den B-Werten nimmt man den Mittelwert und berechnet A-Werte nach der aus (1) folgenden Gleichung

$$A = y_k - Bx_k, \tag{3}$$

die etwas verschiedene Werte ergeben wird, aus denen man das Mittel nimmt. Aus der Streuung der A- und B-Werte berechnet man dann (falls für A überhaupt nötig) die mittleren Fehler ΔA und ΔB. Beispiele finden sich bereits bei der 1. und der 2. Aufgabe.

II. Ausgleichungsrechnung bei gleichen Intervallen. In manchen Fällen – etwa wenn die Variable x durch kalibrierte Wägestücke oder durch die Widerstände eines Stöpselrheostaten verwirklicht wird – ist es meist das Gegebene, daß man die x-Schritte *gleich groß* macht, so daß sich nach (1) auch y in gleichen Schritten ändert. Ist $k = 1, 2, \ldots, n$ die Laufzahl der Einzel-

Beilage 6

Sartorius Handy. H 51.

WH-6001-m88091

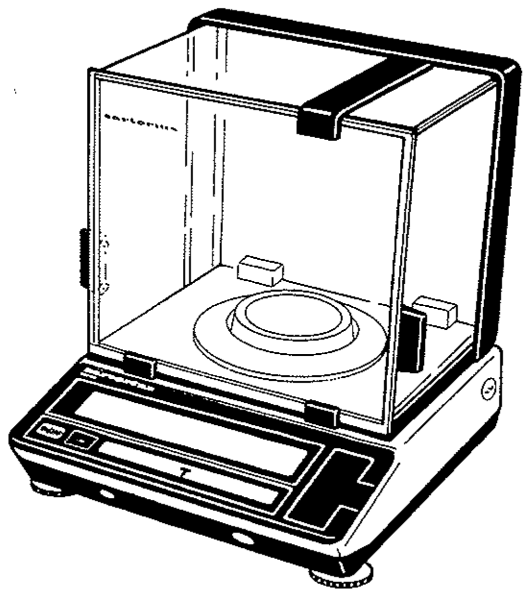
Electronic analytical toploader
Installation and operating instructions

Elektronische Analysenwaage
Aufstellungs- und Betriebsanleitung

Balance d'analyse électronique
Montage et Mode d'Emploi

Balanza electrónica analítica
Instrucciones de instalación y manejo

電子分析天びん
取扱説明書



Corporate Headquarters in West Germany
Sartorius GmbH
P.O. Box 3243
Weender Landstrasse 94–108
D-3400 Goettingen, West Germany
Phone (551) 308-1
Telex 96723
Telefax (551) 308289

Austria
Sartorius Vertriebsgesellschaft mbH
Leberstrasse 108
A-1110 Vienna
Phone (222) 743707/08/10
Telex 134645
Telefax (222) 7443 8224

Canada
Sartorius Canada Inc.
1020 Matheson Boulevard, Unit 6
CDN-Mississauga, Ontario L4W 4J9
Phone (416) 238-4875/6
Telefax (416) 238-4877

France
Sartorius S.A.R.L.
B.P. 27, 11, Avenue du 1er Mai
F-91122 Palaiseau Cedéx
Phone (1) 69209311
Telex 602339
Telefax (1) 69200922

Holland
Verkoopcombinatie
Sartorius-Instrumenten B.V.
Postbus 60, Straatweg 66
NL-3620 AB Breukelen
Phone (3462) 63144, Telex 47024

Japan
Sartorius K.K.
8-8, Shinjuku, 5º-chome
J-Shinjuku-ku, Tokyo 160
Phone (3) 352-8291, 355-0353
Telefax (3) 352-8290

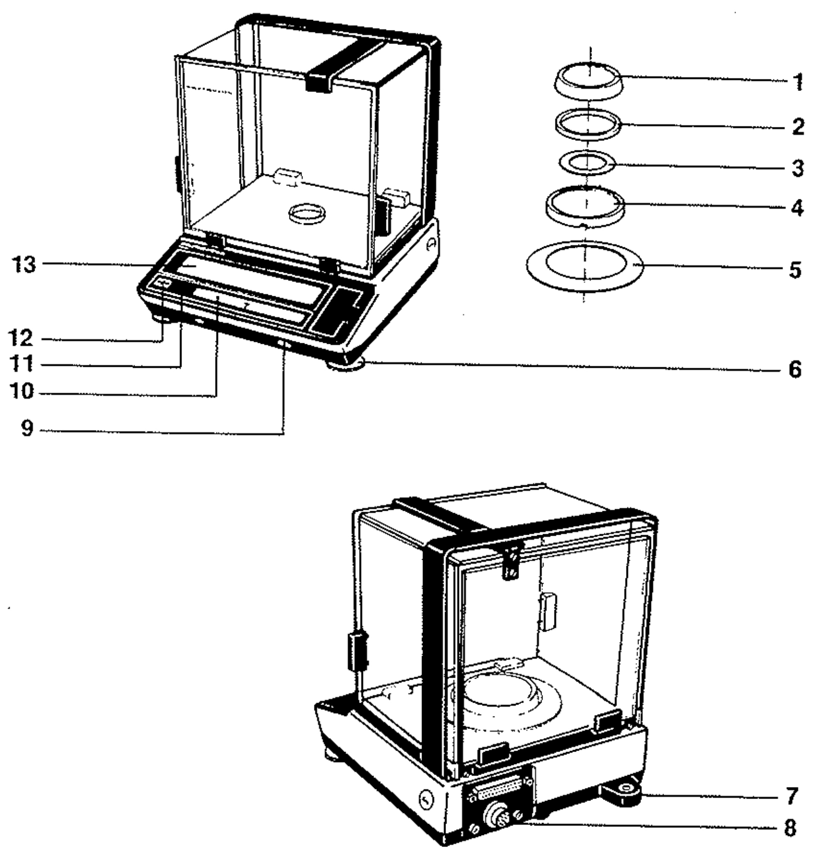
Sweden
Sartorius Produkter AB
Box 2005, Rissneleden 140
S-17202 Sundbyberg
Phone (8) 7330060
Telex 12308
Telefax (46) 87331620

Spain
Sartorius S.A.
C/. Aragoneses, 13,
Poligono Alcobendas
E-28100 Madrid
Phone (1) 6537199
Telex 52687

U. K.
Sartorius Limited
18, Avenue Road
GB-Belmont
Surrey SM2 6JD
Phone (1) 642-8691
Telex 946918
Telefax (1) 642-1104

USA
Sartorius Instruments
1430 Waukegan Road
P.O. Box 770
USA-McGaw Park, IL 60085-6787

Specifications subject to change without notice. Printed in the Federal Republic of Germany · W · M
Publication No.: WH-6001-m88091



1 Pan
Waagschale
Plateau
Platillo
ひょう量皿

2 Compensation ring
Ausgleichsring
Anneau de compensation
Anillo de compensación
テアーリング

3 Compensation disk
Ausgleichsscheibe
Disque de compensation
Disco de compensación
テアーディスク

4 Pan support
Unterschale
Support de plateau
Soporte de platillo
ひょう量皿サポート

5 Protective ring
Schutzring
Anneau de protection
Anillo de protección
ひょう量皿リング

6 Levelling screw
Stellfuß
Pied de réglage
Pata de ajuste
水準調整ねじ

7 Level indicator
Libelle
Niveau à bulle
Nivel
水準器

8 Connection socket for power cable
Betriebsspannungsanschluß
Raccord à la tension du secteur
Conexión para la tensión de servicio
電源ソケット

9 Unlocking switch
Entriegelungsschalter
Commutateur de déverrouillage
Interruptor de desbloqueo
"メニュープログラム" ロックスイッチ

10 Tare bar
Tariertaste
Touche de tarage
Tecla de tara
テアースイッチ

11 CAL button
CAL-Taste
Touche CAL
Tecla de calibración
"CAL" スイッチ

12 ON/OFF button
ON/OFF-Taste
Touche marche/arrêt
Tecla ON/OfF (CON.-DES.)
"ON/OFF" スイッチ

13 Weight display
Gewichtsanzeige
Affichage du poids
Indicador de peso
表示部

Technische Daten.

Modell		H 51
Wägebereich	g	31
Ablesbarkeit	g	0,0001
Tarierbereich (subtraktiv)	g	–51 (31 elektr. + 20 mech.)
Standardabweichung	g	$\leqq \pm$ 0,0001
Max. Linearitätsabweichung	g	$\leqq \pm$ 0,0003
Einschwingzeit (typisch)	s	2
Anzeigefolge	s	0,1 – 0,8 (wählbar)
Anpassung an Einsatz-- und Aufstellbedingungen		4 optimierte Digitalfilter
Stillstandsbreite	d	0,25 . . . 64 (wählbar)
Umgebungstemperaturbereich	K	283 . . . 313
Empfindlichkeitsdrift innerhalb 283 . . . 303 K	/K	$\leqq \pm 2 \cdot 10^{-6}$
Resultatsabweichung bei Schrägstellung 1 : 1000	g	$\leqq \pm$ 0,0002
Kalibriergewicht		serienmäßig eingebaut
Waagschalenabmessung	mm	⌀ 63
freier Raum über der Waagschale	mm	120
Wägeraum (B x T x H)	mm	151 x 121 x 134
Waagengehäuse (B x T x H)	mm	185 x 200 x 210
Nettogewicht	kg	2
Netzspannung, Frequenz 50 – 60 Hz		100/120 V oder 220/240 V, entsprechend verwendetem Netzteil
Leistungsaufnahme	VA	7
Schnittstelle		RS 232 C/V24 – V28, RS 423/V10; 7-bit; parity: even, mark, odd, space; Übertragungsgeschwindigkeit: 150 . . . 9600 Baud

Aufstellhinweise.

Suchen Sie bitte einen geeigneten Aufstellort – möglichst ohne

- Wärmeeinstrahlung
- aggressive Umgebung
- Erschütterungen
- Luftzug

Trotz ungünstiger Aufstellbedingungen kann die MP8-Waage genaue Wägeergebnisse liefern. Passen Sie die Digitalfilterung und die Stillstandsbreite des Waagenbetriebsprogramms über den entsprechenden Code Ihren Anforderungen an. Siehe hierzu letzte Seiten.

Halten Sie nach dem Anschluß an das Stromnetz eine Anwärmzeit > 30 Minuten ein.

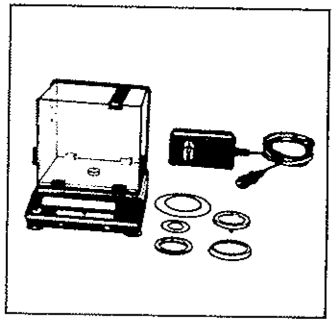
Wichtig!
Ziehen Sie das Netzgerät vor Anschluß und Trennen von Peripherie.

Zubehör

Transportkoffer	YDB 0 1 H
Diebstahlsicherung	YTP 0 1
20 g-Waagschale	YCP 0 1 H
Datenausgang	YDO 0 1 H
Integrierbares Tastenfeld »Data Input« mit F für Rezeptur	YDI 0 1 H-**F
Drucker »Data Print«	7279

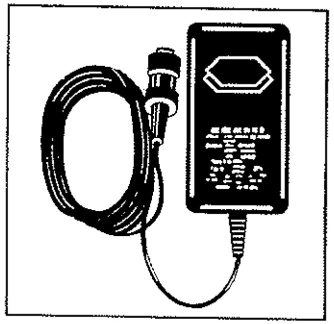
Lieferumfang.

Verschenken Sie nicht Ihren erweiterten Garantieanspruch. Schicken Sie uns bitte die vollständig ausgefüllte Garantieanmeldung.



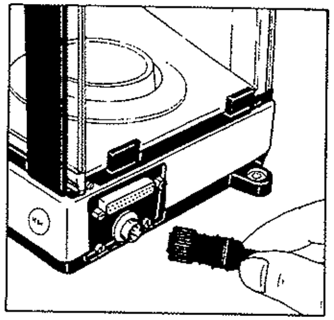
Lieferumfang
Der Lieferumfang umfaßt die abgebildeten Teile.

Inbetriebnahme.

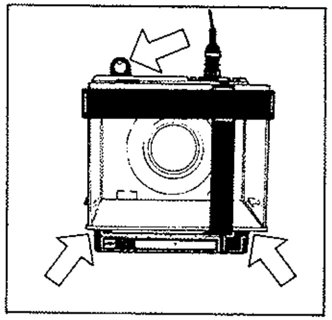


Setzen Sie die Teile **(5 – 1)** in den Wägeraum ein.

Die Stromversorgung erfolgt über das Netzgerät. Der aufgedruckte Spannungswert muß mit der örtlichen Spannung übereinstimmen.



Stellen Sie den Stromanschluß her. Sichern Sie die Verbindung mit dem Schraubring.
Stecken Sie das Netzgerät in eine Steckdose.



Richten Sie jetzt die Waage am Aufstellort mit den Stellfüßen **(6)** so aus, daß die Luftblase der Libelle **(7)** in Kreismitte steht.

Betreiben der Waage.

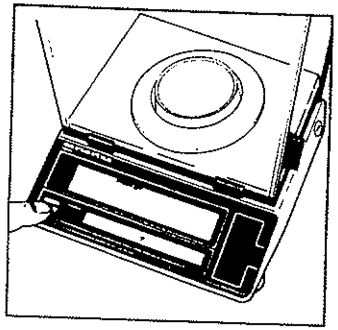
Zu Ihrer Information erscheinen folgende Sonderinformationen in der Gewichtsanzeige:

BUSY
Der Waagenprozessor arbeitet eine Funktion ab und übernimmt keine weitere Aufgabe.

STANDBY
Die Waage ist über die ON/OFF-Taste ausgeschaltet worden und befindet sich im STANDBY-Betrieb.

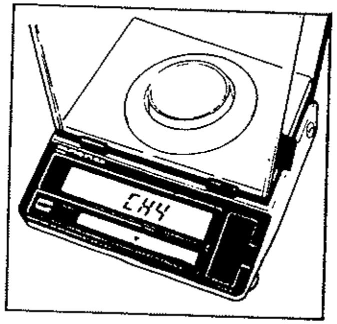
POWER OFF
Die Waage war vom Netz getrennt. (Neuanschluß, Stromausfall).

CAL
Die Kalibrierfunktion ist aufgerufen.

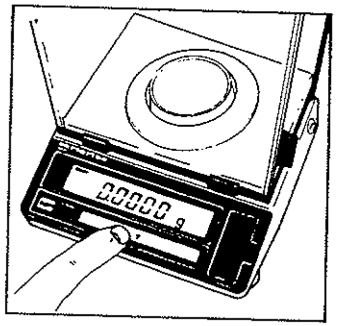


Drücken Sie zum Ein- und Ausschalten die ON/OFF-Taste **(12).** Zusätzlich können Sie über die Tariertaste **(10)** einschalten.

Nach dem Anschluß an das Netz erlischt beim Ausschalten nur die Anzeige. Die Waagenelektronik bleibt eingeschaltet (STANDBY). Die Waage ist so ohne Anwärmzeit sofort nach dem Einschalten wieder betriebsbereit.

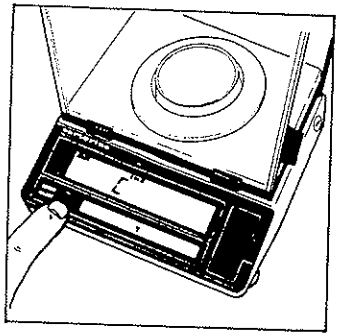


Nach dem Einschalten erfolgt ein automatischer Funktionstest der Waagenelektronik.
Er endet mit der Anzeige 0,0000 g.



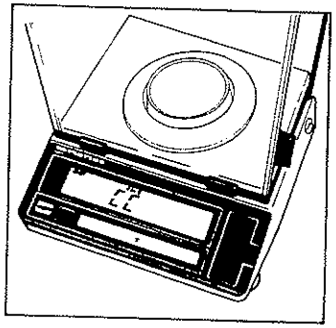
Tarieren Sie vor dem Wägen, wenn Sie ein Gefäß verwenden oder wenn die Gewichtsanzeige nicht 0,0000 g anzeigt (entsprechend bei anderer Gewichtseinheit).

Kalibrieren.



intern:

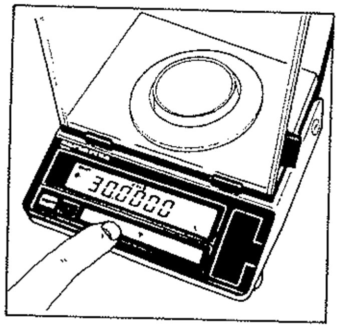
Entlasten Sie die Waage und tarieren Sie. Drücken Sie bei Anzeige 0,0000 g die CAL-Taste **(11).** In der Gewichtsanzeige erscheint »C«. Wenn »CE« erscheint, tarieren Sie und drücken Sie die CAL-Taste erneut.



Nach einigen Sekunden wird »CC« angezeigt, dann 0,0000 g. Ein akustisches Signal zeigt das Ende des Kalibriervorgangs an.

oder

extern:
– nur möglich mit genauem Kalibriergewicht



Entlasten Sie die Waage und drücken Sie die Tariertaste mindestens 3 Sekunden, bis der Kalibriergewichtswert in der Gewichtsanzeige erscheint.

Stellen Sie das Kalibriergewicht auf die Waagschale.

Das Gewichtseinheitszeichen erscheint in der Gewichtsanzeige. Ein akustisches Signal zeigt das Ende des Kalibriervorgangs an.

Die interne und die externe Kalibrierfunktion kann gesperrt werden – siehe »Waagenbetriebsprogramm«. Diese Sperre ist aufgehoben, wenn das Waagenbetriebsprogramm mit dem Entriegelungsschalter entriegelt ist.

Mit dieser Waage können Sie außer in Gramm auch in anderen internationalen Gewichtseinheiten wägen.

Wählen Sie die benötigte Gewichtseinheit aus der Tabelle im Waagenbetriebsprogramm aus. Stellen Sie den entsprechenden Code ein, wie unter »Waagenbetriebsprogramm« beschrieben.

Wägen

Die Gewichtsbelastung durch ein Taragefäß kann durch Abnehmen von Ausgleichsring und/oder -scheibe kompensiert werden – jeweils 10 g.

Wenn Sie die 20 g-Waagschale (siehe Zubehör) verwenden, nehmen Sie bitte den Ausgleichsring **(2)** und die Ausgleichsscheibe **(3)** zwischen Waagschale und Unterschale heraus.

So steht Ihnen auch bei Verwendung eines Taragefäßes der volle Wägebereich zur Verfügung.