Praktikumsplatz Nr.: 53, 54, 62

Drehpendel

Computerunterstützte Untersuchung von Schwingungen

Aufgaben:

- Bestimmung der Eigenfrequenz des Systems
- Messungen an freien Schwingungen bei verschiedenen Dämpfungen
- Messungen an erzwungenen Schwingungen bei verschiedenen Dämpfungen

Technische Universität Wien, Fakultät für Physik Physikpraktikum-Laborübungen

Diese Platzanleitung wurde von den Instituten E134 und E138 für die Laborübungen im Physikpraktikum herausgegeben und ist nur für den internen Gebrauch im Rahmen des Lehrbetriebes an der TU bestimmt.

Version 1.0.1 vom 21. Feb. 2008

Inhaltsverzeichnis

1 ÜBERBLICK

1.1 Zweck der Versuche

Es sollen freie und erzwungenen Schwingungen bei verschiedenen Dämpfungen an einem Drehpendel untersucht werden.

Man informiere sich unbedingt vor Praktikumsbeginn über:

- **Aufbau und Wirkungsweise des Drehpendels nach Pohl**
- **Mechanische Schwingungen und ihre Differentialgleichungen, insbesondere jene des Drehpendels**
- **Trägheitsmoment, Dämpfungskoeffizient und Richtgröße**
- **Lösungen der erwähnten Differentialgleichungen**

1.2 Protokoll

Während der Durchführung der Versuche ist auch ein Protokoll zu verfassen; bitte beachten Sie diesbezüglich auch das Informationsblatt am Anfang der Laborübungen. Beschreiben Sie im Protokoll in einigen wenigen Sätzen je Versuch, wie Sie dabei vorgegangen sind, was Sie dabei beobachtet haben und wie Sie es interpretieren. Zusätzlich sind die Messungen samt Auswertung in Form von Tabellen und Graphen zu dokumentieren.

1.3 Ausrüstung

- Drehpendel nach Pohl
- Netzgerät mit Gleichspannungs- und Gleichstromversorgung
- Mess-System bestehend aus Computer, CASSY-Grundgerät und Bewegungsmesswandler mit Anschlussbox

Achtung:

- **Wirbelstrombremse nur kurzzeitig über 1 A betreiben**
- **Resonanzkatastrophe vermeiden**

2 DER VERSUCHSAUFBAU

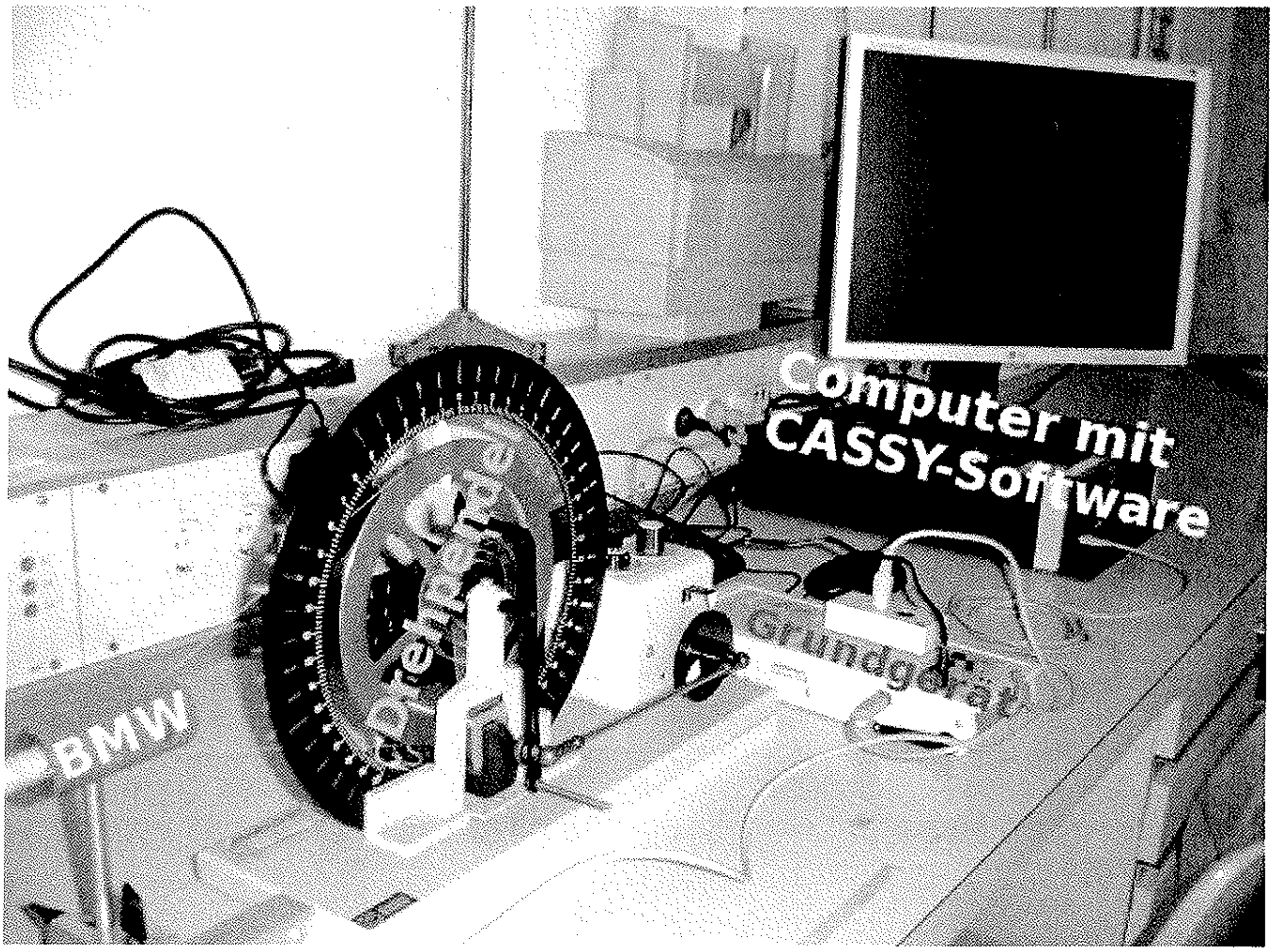


Abbildung 1: Versuchsaufbau

2.1 Das Drehpendel

Das hier verwendete **Drehpendel** nach Pohl (Firma Leybold) besteht aus einem auf einer Achse gelagerten Pendelkörper (Kupferrad) und einer Schneckenfeder (Spiralfeder), die einerseits an der Nabe des Pendelkörpers und andererseits an einem mit einer Schubstange verbundenen Übertragungshebel verbunden ist. Wenn der Übertragungshebel in der Postion Mitte (Null auf der Skala) festgehalten und der Pendelkörper auslenkt wird, dann wird der Pendelkörper aufgrund des durch die Scheckenfeder hervorgerufenen Rückstellmoments eine harmonische Schwingung symmetrisch um diese mittige Position ausführen. Die Frequenz der Schwingung entspricht der Eigenfrequenz des Systems.

Um gedämpfte Schwingungen beobachten zu können, besitzt der Versuchsaufbau eine **Wirbelstrombremse**, die aus einem Elektromagneten besteht (Wirkungsweise siehe Kapitel 3.1.2). Die Stärke der Dämpfung kann mit der Stromstärke durch den Elektromagneten eingestellt werden. Damit sind prinzipiell die unterschiedlichen

Schwingungsarten, die bei zunehmender Dämpfung auftreten, der Untersuchung zugänglich.

Mithilfe eines **Treibermotors** (Gleichstrommotor) kann das Pendel auch zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Die Erregerspannung des Gleichstrommotors und somit auch die Frequenz der Anregung kann mit zwei Potentiometern (grob und fein) eingestellt werden. Die Rotationsbewegung des Motors wird mit Hilfe eines Exzenters, der Schubstange und des Übertragungshebels in eine periodische Drehbewegung der Halterung der Schneckenfeder am Übertragungshebel umgesetzt. Daraus ergibt sich ein von außen auf das System wirkendes, sich periodisch änderndes Drehmoment. Nimmt man nun den Motor in Betrieb, so wird das Drehpendel angeregt und der Pendelkörper beginnt zu schwingen. Nach einem Einschwingvorgang wird sich im Allgemeinen eine stabile Schwingung ausbilden, wobei die Frequenz der Schwingung der Erregerfrequenz entspricht. Achtung: Schwach gedämpfte erzwungene Schwingungen nahe der Eigenfrequenz führen zu hohen Schwingungsamplituden (Resonanzkatastrophe).

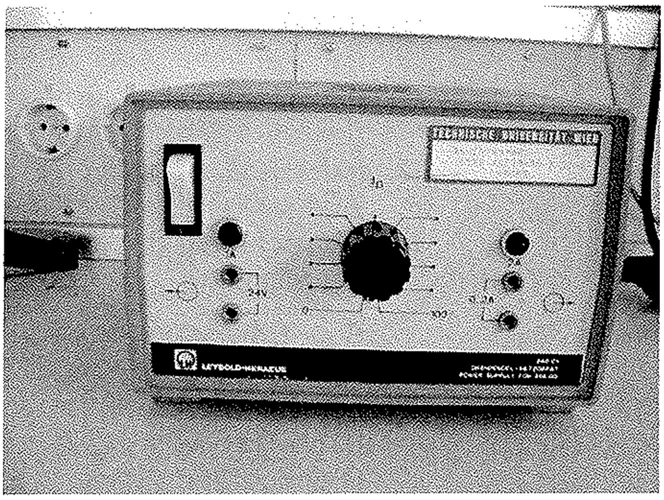


Abbildung 2: Netzgerät

Die Stromversorgung für den Motor und die Wirbelstrombremse erfolgt über ein externes **Netzgerät**. Dort kann auch die Stromstärke für die Bremse geregelt werden (im abgebildeten Netzgerät der rechte Anschluss mit 0-2 A).

2.1.1 Technische Daten

Eigenfrequenz:	ca. 0,5 Hz
Erregerfrequenz:	einstellbar zwischen 0 und ca. 1,2 Hz

Betriebsdaten des Motors

Erregerspannung:	0 bis 24 V DC, kontinuierlich einstellbar
Stromaufnahme:	max. 0,6 A

Betriebsdaten der Wirbelstrombremse

Versorgungsspannung:	0 bis ca. 24 V
Belastbarkeit:	1 A (kurzzeitig 2 A)

2.2 Das Mess-System (Hardware)

An diesem Praktikumsplatz wird das ebenfalls von der Firma Leybold hergestellte Mess-System CASSY verwendet.

Es benötigt einen handelsüblichen Windows-PC und besteht aus folgenden Komponenten:

- Grundgerät (wird per USB mit dem Computer verbunden)
- Bewegungsmesswandler („BMW") + Anschlussbox
- Lichtschranke (in dieser Übung nicht verwendet)
- Software zur Aufnahme und Auswertung der Messdaten („CASSY Lab")

Das **Grundgerät** besitzt mehrere Eingänge, an die z.B. die Bewegungsmesswandler-Box angeschlossen werden kann. Es können auch Spannungen bis 30 V und Ströme bis 3 A direkt gemessen werden.

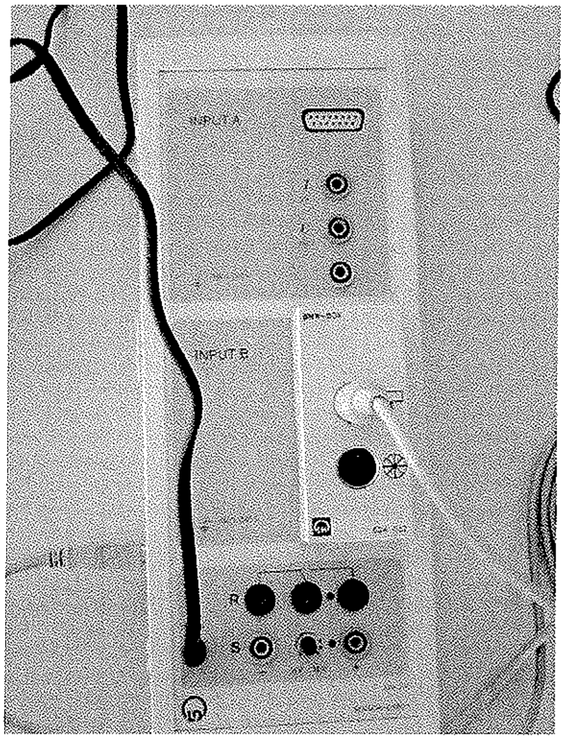


Abbildung 3: CASSY-Grundgerät mit BMW-Box auf Eingang B

Der **Bewegungsmesswandler** besteht aus einem Rädchen mit Speichen, das bei Drehung nacheinander zwei im Bewegungsmesswandler eingebaute Lichtschranken unterbricht. Die Anzahl der Unterbrechungen seit einem festgelegten Nullpunkt ist ein Maß für den Drehwinkel, die Reihenfolge der beiden Lichtschranken gibt Auskunft über die Drehrichtung.

Angeschlossen wird der Bewegungsmesswandler an die BMW-Box (obere Buchse mit dem Bewegungsmesswandler-Symbol). Die BMW-Box wird direkt in Eingang A oder B des Grundgeräts gesteckt. Es empfiehlt sich aber, Eingang B zu verwenden, weil Eingang A dann frei bleibt und nur dort Ströme gemessen werden können. Es wird nicht die aktuelle Pendelposition als Spannung übertragen, sondern nur die Unterbrechungen der Lichtschranken als digitales Signal.

2.3 Die Mess-Software

Die zum System gehörende Windows-Software „CASSY Lab" dient zum Aufnehmen und Auswerten der vom Grundgerät übertragenen Messwerte.

Die USB-Hardware wird nach dem Start von CASSY Lab automatisch erkannt. Im „**Einstellungen**"-Dialog (im Hauptfenster F5 drücken oder das Werkzeug-Symbol anklicken) in der Registerkarte „**CASSY**" wird die erkannte Anordnung der Sensorboxen bzw. Sensoren angezeigt. Die Abbildung in der CASSY-Registerkarte soll die Messanordnung symbolisieren: das graue Rechteck entspricht dem Grundgerät mit Kanal A1 und B1 und ggf. den angeschlossenen Sensoren.

Meistens ist es im Gegensatz zu anderen Anwendungen nicht nötig, Dialoge mit „OK" zu beenden. Sobald eine Einstellung getätigt wurde, ist sie auch gültig und der Dialog kann einfach geschlossen werden.

Durch Anklicken eines Kanals (z.B. die BMW-Box) lässt sich dieser aktivieren und einstellen. Die einstellbaren Größen hängen von der Sensorbox bzw. vom Sensor ab. Nur aktivierte Kanäle werden bei der Messung berücksichtigt.

In der Registerkarte „**Parameter/Formel/FFT**" können Größen definiert werden, die nicht direkt gemessen werden. Es können Konstante, Parameter (manuell einzugeben), Formeln (Ermittlung des Werts einer Größe durch andere Größen), sowie die Funktionen Ableitung, Integral, Mittelwert, FFT (schnelle Fourier-Transformation) und Histogramm eingegeben werden.

Bei der Definition von Größen können griechische Buchstaben mit einem vorangestellten „&" eingegeben werden, also z.B. „&a" für „α".

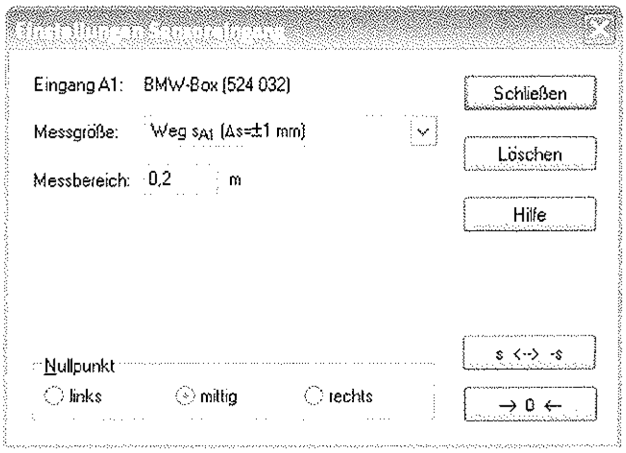


Abbildung 4: Sensoreinstellungen BMW-Box

Die gemessenen Daten werden in sogenannten **Darstellungen** ausgegeben. Eine Darstellung besteht aus einer Daten-Tabelle und einem Diagramm. Das Diagramm besitzt eine x-Achse und bis zu 8 y-Achsen. Die Belegung der Achsen ist dabei frei wählbar.

Die Funktion „**Modellbildung**" erlaubt das Vergleichen der gemessenen Werte mit denen eines mathematischen Modells. Es können auch Konstanten bestimmt werden, damit das Modell möglichst gut mit der Realität übereinstimmt.

3 PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

3.1 Allgemeines

Das Drehpendel kann durch eine Gleichung der Drehmomente beschrieben werden. Im Allgemeinen ist dies eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung folgender Form:

$$\underbrace{J\ddot{\varphi}(t)}_{\text{Trägheitsterm}} + \underbrace{r\dot{\varphi}(t)}_{\text{Dämpfungsterm}} + \underbrace{D\varphi(t)}_{\text{Rückstellterm}} = \underbrace{M_0\cos(\omega_E t)}_{\text{Erregerterm}}$$

Diese Gleichung beschreibt eine gedämpfte erzwungene Schwingung mit folgenden Elementen:

$\varphi(t)$	... zeitabhängige Auslenkung (Winkel) des Pendelkörpers
$\dot{\varphi}(t)=\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}$	... zeitabhängige Winkelgeschwindigkeit des Pendelkörpers
$\ddot{\varphi}(t)=\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial t^2}$	... zeitabhängige Winkelbeschleunigung des Pendelkörpers
J	... Trägheitsmoment des Pendelkörpers
r	... Dämpfungskoeffizient (auch Reibung)
D	... Richtgröße (Winkelrichtgröße)
M_0	... Amplitude des von außen wirkenden Drehmoments
ω_E	... Erregerkreisfrequenz

3.1.1 *Trägheitsmoment J*

Das Trägheitsmoment gibt an wie träge ein Körper gegenüber Rotationsbewegungen ist. (Bei Translationsbewegungen ist die Trägheit durch die Masse gegeben.) Es hat die Einheit [kg m²].

Ein Massepunkt der Masse m, der mit Radius r um eine Drehachse kreist, hat einen Drehimpuls $L=mvr=mr^2\omega$. Das Trägheitsmoment wird nun mit $J=mr^2$ definiert, sodass $L=J\omega$ in Analogie zu $p=mv$ gilt.

Sind mehrere Punkte vorhanden, können die Drehimpulse und damit auch die Trägheitsmomente summiert werden. Geht man zum starren Körper und damit zum Kontinuum über, ergibt sich $J=\int r^2 dm=\int_V \rho(\vec{r})\, r^2 dV$ bzw. für homogene Körper:

$$J=\rho\int_V r^2 dV$$

Das Trägheitsmoment des Pendelkörpers ist daher hauptsächlich durch das Kupferrad bestimmt.

3.1.2 *Dämpfungskoeffizient r, Prinzip der Wirbelstrombremse*

Das Drehpendel besitzt einen natürlichen von Null verschiedenen

Dämpfungskoeffizienten, der durch Reibung hervorgerufen wird. Eine zusätzliche Dämpfung kann durch die Wirbelstrombremse eingestellt werden.

Wirkungsprinzip der Wirbelstrombremse: Bewegt sich eine Metallplatte in einem Magnetfeld, werden in ihr gemäß dem Faraday'schen Induktionsgesetz Spannungen induziert. Diese bewirken in der leitenden Metallplatte sogenannte Wirbelströme (Ohm'sches Gesetz). Die Lenz'sche Regel besagt, dass ein induzierter Strom und sein resultierendes Magnetfeld immer der Ursache entgegenwirkt. Ist die Ursache die Bewegung der Metallplatte, so bildet sich eine Kraft aus, die eben dieser Bewegung entgegenwirkt. Diese auf die Metallplatte wirkende Kraft ist im wesentlichen proportional zur Geschwindigkeit der Metallplatte und zum Quadrat des durch den Elektromagneten fließenden Stromes. Das durch die Wirbelstrombremse auf den Pendelkörper wirkende Bremsdrehmoment ist das Resultat dieser tangential wirkenden Kraft, die in einem bestimmten Abstand zur Drehachse angreift. Der Abstand ist durch die Position der Wirbelstrombremse zur Drehachse festgelegt.

3.1.3 Richtgröße D

Als Richtgröße wird jener Proportionalitätsfaktor bezeichnet, der mit der momentanen Auslenkung multipliziert den Rückstellterm in der Differentialgleichung ergibt (in unserem Fall das rücktreibende Drehmoment). Beim klassischen Federpendel (lineare Bewegung) wäre dies die Federkonstante der Schraubenfeder (Hook'sches Gesetz). Beim Drehpendel ist dies die sogenannte Winkelrichtgröße oder Winkelrichtmoment. Obige Differentialgleichung zeigt, dass sie einem Drehmoment pro Winkeleinheit entspricht. Das rücktreibende Drehmoment kommt durch die Kraftwirkung der Schneckenfeder auf die Befestigung der Feder an der Nabe des Pendelkörpers zustande. Die Kraftwirkung der Schneckenfeder ist proportional zum Auslenkwinkel. Das rücktreibende Drehmoment ist das Resultat dieser tangential angreifenden Kraft und dem Abstand der Befestigung zur Drehachse.

3.1.4 Amplitude des äußeren Drehmoments M_0

Diese Amplitude resultiert aus dem mechanischen Aufbau und der Geometrie der Bewegungsübertragung vom Motor zur Aufhängung der Schneckenfeder am Übertragungshebel. Der Abstand der Befestigung der Schubstange (Kugelgelenk) an der Exzenterscheibe von der Drehachse des Motors ist festgelegt. Die Länge der Schubstange kann in Grenzen eingestellt werden, soll aber im Zuge dieser Versuche nicht verändert werden. Der Angriffspunkt der Schubstange am Übertragungshebel (Kugelgelenk in Langlochbefestigung) kann dagegen leicht angepasst werden; es sollen aber für alle Versuche dieselben Einstellungen verwendet werden. Das Verhältnis der beiden Hebellängen des Übertragungshebels bestimmt dann die maximale Auslenkung der Befestigung der Schneckenfeder am Übertragungshebel. Dadurch wird die Schneckenfeder in periodischer Folge gespannt und entspannt und bewirkt somit ein periodisches Drehmoment auf den Pendelkörper. Die Schwingungen des Übertragungshebels werden somit dem Pendelkörper aufgezwungen. Die Winkelauslenkung des Übertragungshebels entspricht bei sehr niedriger Erregerfrequenz auch der Winkelauslenkung des Pendelkörpers, da dieser dann ohne Phasenverschiebung der Winkelauslenkung folgen kann.

3.1.5 Erregerkreisfrequenz ω_E

Sie wird durch die Motordrehzahl festgelegt, d.h. sie kann über die Erregerspannung des Gleichstrommotors eingestellt werden.

3.2 Das frei schwingende Pendel

Beim frei schwingenden Pendel fällt der Erregerterm weg, d.h. die allgemeine Form der Differentialgleichung lautet:

$$J\ddot{\varphi}_{frei}(t)+r\dot{\varphi}_{frei}(t)+D\varphi_{frei}(t)=0$$

3.2.1 Das ungedämpfte Drehpendel

Beim ungedämpften Pendel fällt auch der Dämpfungsterm weg. Dadurch bleibt nur mehr das rücktreibende (deswegen das Minus auf der rechten Seite) Drehmoment der Feder, das proportional zur Auslenkung φ ist.

$$J\ddot{\varphi}(t)=-D\varphi(t)$$
$$\boldsymbol{J\ddot{\varphi}(t)+D\varphi(t)=0}$$

Wie weiter oben beschrieben, ist J das Trägheitsmoment und D die Richtgröße. Je größer das Trägheitsmoment, desto kleiner ist die Winkelbeschleunigung bei gleicher Auslenkung (siehe oben). Die Richtgröße gibt das Verhältnis zwischen Auslenkung und rücktreibendem Drehmoment an (entspricht der Federkonstante bei einem Federpendel).

Die Lösung dieser Differentialgleichung erfolgt durch einen Exponentialansatz:

$$\varphi(t):=A e^{\alpha t}$$
$$\ddot{\varphi}(t)=\alpha^2 A e^{\alpha t}$$
$$J(\alpha^2 A e^{\alpha t})+D(A e^{\alpha t})=0$$
$$\alpha^2+\frac{D}{J}=0$$
$$\alpha_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{D}{J}}$$

Die Linearkombination der beiden Lösungen mit den beiden Exponentialkoeffizienten liefert unter Verwendung der Euler'schen Identität eine harmonische Schwingung:

$$\omega_0=2\pi f_0=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{D}{J}}$$
$$\varphi(t)=A_1 e^{\alpha_1 t}+A_2 e^{\alpha_2 t}=B_1\cos(\omega_0 t)+B_2\sin(\omega_0 t)$$

wobei ω_0 die Eigenkreisfrequenz, f_0 die Eigenfrequenz und T die Schwingungsdauer des Pendels ist. ω_0 ist durch das Verhältnis von Winkelrichtgröße zu Trägheitsmoment bestimmt.

Als Anfangsbedingung für das Pendel sei

a) die Anfangsauslenkung $\varphi(t=0)=\varphi_0$ und

b) die Anfangswinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t=0)=0$

d.h. das Pendel wird bei φ_0 einfach losgelassen, wodurch nur mehr der Kosinus relevant ist:

$$\varphi(t=0)=\varphi_0=B_1\cos(\omega_0\cdot 0)\Rightarrow$$
$$\boldsymbol{\varphi(t)=\varphi_0\cos(\omega_0 t)}$$

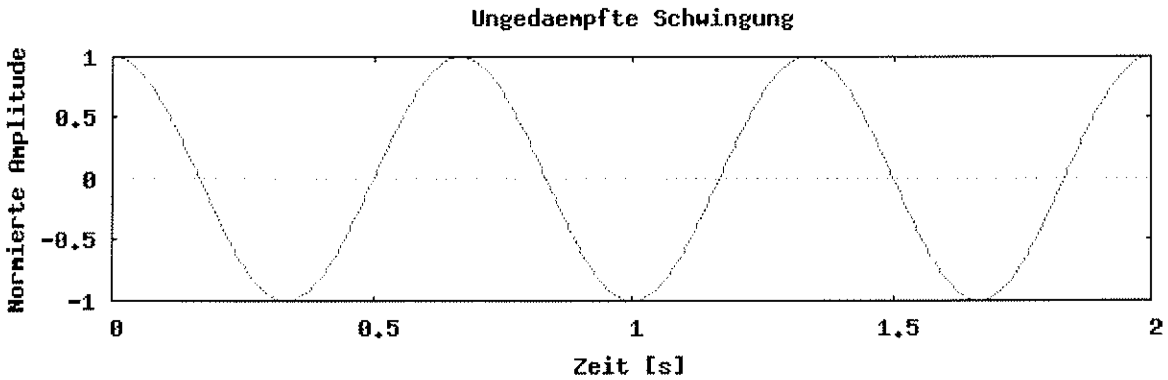


Abbildung 5: Zeitlicher Verlauf einer ungedämpften Schwingung

3.2.2 Das gedämpfte Pendel

Im Modell des gedämpften Pendels wird die Drehbewegung durch eine zusätzliche geschwindigkeitsabhängige Dämpfung gebremst:

$$J\ddot{\varphi}(t)=-D\varphi(t)-r\dot{\varphi}(t)$$
$$J\ddot{\varphi}(t)+r\dot{\varphi}(t)+D\varphi(t)=0$$
$$\ddot{\varphi}(t)+\frac{r}{J}\dot{\varphi}(t)+\frac{D}{J}\varphi(t)=0$$
$$\boldsymbol{\ddot{\varphi}(t)+\frac{r}{J}\dot{\varphi}(t)+\omega_0^2\varphi(t)=0}$$

wobei r der Dämpfungskoeffizient ist.

Wieder werden mit dem Exponentialansatz $e^{\alpha t}$ die allgemeine Lösung und die Koeffizienten ermittelt:

$$(\alpha^2 e^{\alpha t})+\frac{r}{J}(\alpha e^{\alpha t})+\omega_0^2(e^{\alpha t})=0$$
$$\alpha^2+\frac{r}{J}\alpha+\omega_0^2=0$$
$$\alpha_{1,2}=-\underbrace{\frac{r}{2J}}_{\delta}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{r}{2J}\right)^2}_{\delta^2}-\omega_0^2}$$

wobei $\delta=\frac{r}{2J}$ als Abklingkonstante bezeichnet wird.

$$\varphi(t)=A_1 e^{\alpha_1 t}+A_2 e^{\alpha_2 t}$$
$$\dot{\varphi}(t)=A_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t}+A_2\alpha_2 e^{\alpha_2 t}$$

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$\varphi(0)=\varphi_0$$
$$\dot{\varphi}(0)=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)(0)=0$$

Das Pendel ist zu Beginn also auf φ_0 ausgelenkt und hat die Winkelgeschwindigkeit 0.

Gedämpfte Schwingung

Für kleine Dämpfung $\delta^2<\omega_0^2$ ergeben sich imaginäre Koeffizienten $\alpha_{1,2}=-\delta\pm i\omega$ mit $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$. ω ist somit die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung; bei schwacher Dämpfung ist die Abweichung von der Eigenkreisfrequenz gering.

Die Linearkombination ergibt:

$$\varphi_{gedämpft}(t)=A_1 e^{(-\delta+i\omega)t}+A_2 e^{(-\delta-i\omega)t}$$
$$\varphi_{gedämpft}(t)=e^{-\delta t}\left(A_1 e^{i\omega t}+A_2 e^{-i\omega t}\right)=e^{-\delta t}\left(B_1\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)\right)$$

Mit den Anfangsbedingungen folgt:

$$\varphi_{gedämpft}(0)=\varphi_0=B_1$$
$$\dot{\varphi}_{gedämpft}(0)=0$$
$$-\delta B_1+\omega B_2=0$$

Die gesamte Lösung für die gedämpfte Schwingung lautet also:

$$\varphi_{gedämpft}(t)=\varphi_0 e^{-\delta t}\left(\cos(\omega t)+\frac{\delta}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

Bei sehr schwacher Dämpfung ($\delta\ll\omega$) kann dieser Ausdruck vereinfacht werden zu:

$$\boldsymbol{\varphi_{gedämpft}(t)\approx\varphi_0 e^{-\delta t}\left(\cos(\omega_0 t)\right)}$$

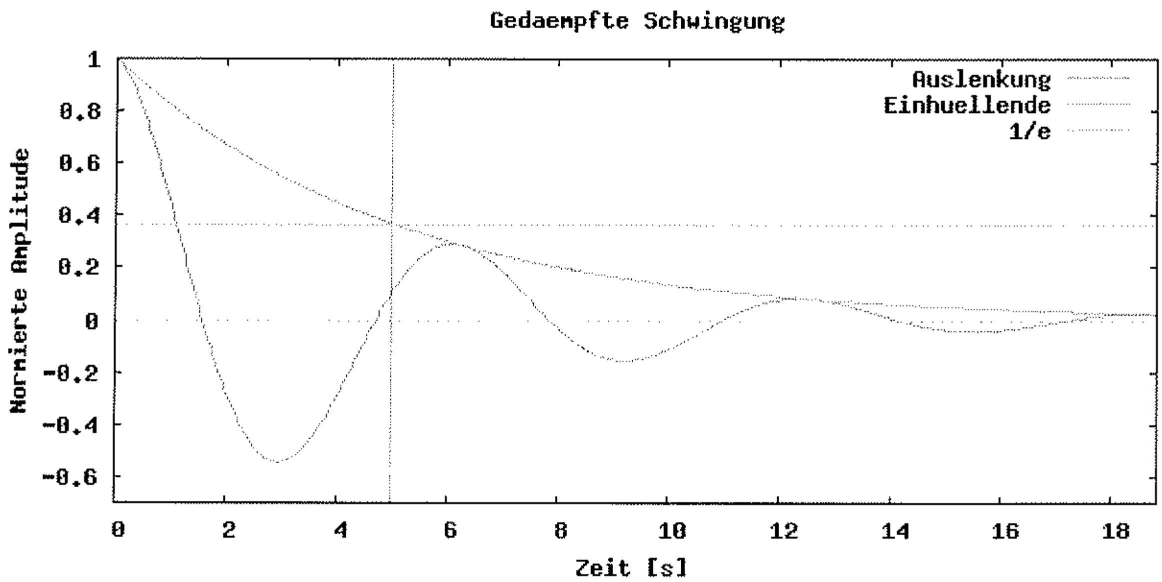


Abbildung 6: Zeitlicher Verlauf einer gedämpften Schwingung

Nach Ablauf der Zeit $t=\frac{1}{\delta}$ sinkt der Amplitudenfaktor $e^{-\delta t}$ auf $\frac{1}{e}$ seines Anfangswertes ab. Das Verhältnis zweier benachbarter Amplituden ist eine Konstante und heißt Dämpfungsdekrement $k=\varphi_n/\varphi_{n+T}=e^{\delta T}$, ihr natürlicher Logarithmus heißt logarithmisches Dämpfungsdekrement $\Lambda=\delta T=\ln k$.

Kriechfall

Bei sehr großer Dämpfung ($\delta^2>\omega_0^2$) bleiben die Koeffizienten α_1 und α_2 reell und es ergibt sich der sogenannte Kriechfall, in dem das System nur sehr langsam in den Ausgangspunkt zurückkehrt:

$$\varphi_{Kriechfall}(t)=A_1 e^{-\alpha_1 t}+A_2 e^{-\alpha_2 t}$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$A_1+A_2=0$$
$$\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2=0$$
$$A_1=\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1} \qquad A_2=\frac{-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}$$

Die gesamte Lösung für den Kriechfall lautet also:

$$\boldsymbol{\varphi_{Kriechfall}(t)=\frac{\varphi_0}{\alpha_1-\alpha_2}(\alpha_1 e^{-\alpha_2 t}-\alpha_2 e^{-\alpha_1 t})}$$

Aperiodischer Grenzfall

Genau an der Grenze zwischen gedämpfter Schwingung und Kriechen liegt der sogenannte aperiodische Grenzfall, bei dem $\delta^2=\omega_0^2$. Bei der Berechnung der Koeffizienten (siehe oben) wird der Wurzelausdruck in diesem Fall Null, sodass nur ein Koeffizient $\alpha=-\delta$ und damit (wie aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen bekannt) neben der Lösung $e^{\alpha t}$ auch die linear unabhängige Lösung $t e^{\alpha t}$ existiert:

$$\varphi_{Grenzfall}(t)=A_1 e^{-\delta t}+A_2 t e^{-\delta t}$$
$$\dot{\varphi}_{Grenzfall}(t)=-A_1 \delta e^{-\delta t}+A_2 e^{-\delta t}(1-\delta t)$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt:

$$A_1=\varphi_0$$
$$-A_1\delta+A_2=0$$
$$A_2=A_1\delta$$

Die gesamte Lösung für den aperiodischen Grenzfall unter den gegebenen Anfangsbedingungen lautet also:

$$\boldsymbol{\varphi_{Grenzfall}(t)=\varphi_0 e^{-\delta t}(1+\delta t)}$$

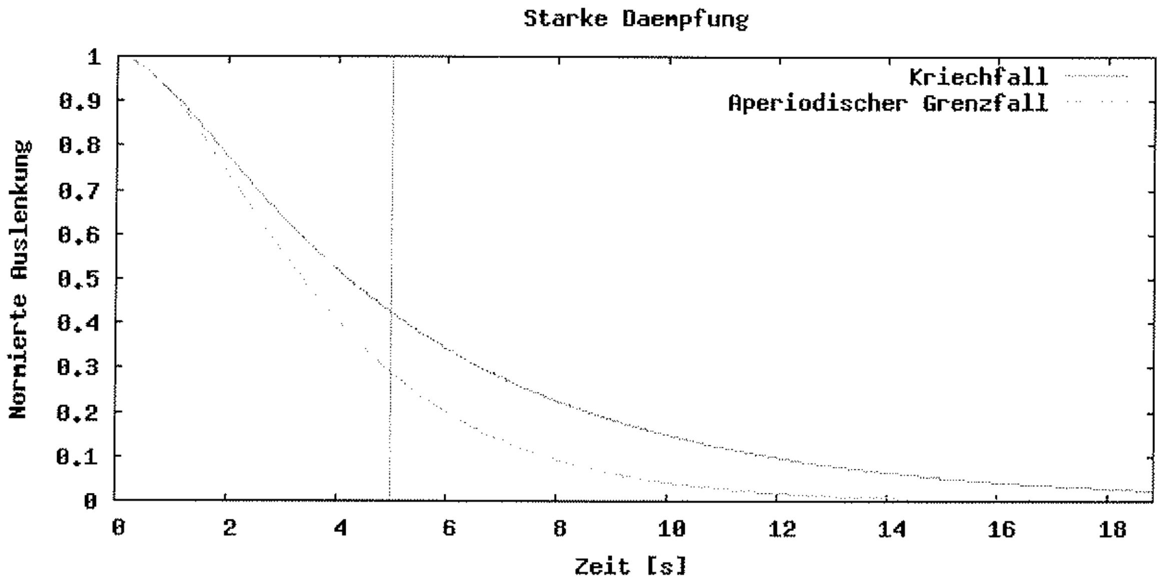


Abbildung 7: Zeitlicher Verlauf der Auslenkung im Kriechfall bzw. aperiodischen Grenzfall

3.3 Das getriebene Pendel

Beim getriebenen Pendel wird dem Pendel durch einen Antrieb (Erreger) dauernd Energie zugeführt. Da die Schwingungen des Erregers dem Pendelkörper aufgezwungen werden, nennt man solche Schwingungen auch erzwungene Schwingungen. Die Schwingungsgleichung lautet:

$$J\,\ddot{\varphi}_{getrieben}(t)+r\,\dot{\varphi}_{getrieben}(t)+D\,\varphi_{getrieben}(t)=M_0\cos(\omega_E t)$$

$$\ddot{\varphi}_{getrieben}(t)+2\delta\,\dot{\varphi}_{getrieben}(t)+\omega_0^2\varphi_{getrieben}(t)=\frac{M_0}{J}\cos(\omega_E t)$$

Auf das schwingende System wirkt das äußeres periodische Drehmoment des Erregers mit der Erregerkreisfrequenz ω_E.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung besteht aus der allgemeinen Lösung des homogenen Anteils und der speziellen Lösung $u(t)$ für den Erregerterm:

$$\varphi_{getrieben}(t)=\varphi_{ungetrieben}(t)+u(t)$$

Es ist bekannt, dass bei kosinusförmigen Störungen der Ansatz $a\cos(\omega_E t)+b\sin(\omega_E t)=A\cos(\omega_E t-\Delta\phi)$ für die spezielle Lösung zum Erfolg führt.

Der Lösungsanteil der ungetriebenen Schwingung ist in allen drei Fällen (gedämpfte Schwingung, Kriechfall aperiodischer Grenzfall) abklingend und trägt daher nach einer gewissen Einschwingzeit praktisch nicht mehr zur Lösung bei. Für den gesuchten stationären Zustand ist also nur die spezielle Lösung relevant.

$$\boldsymbol{\varphi_{getrieben}(t)}=\underbrace{(\ldots)e^{-\delta t}}_{\text{Einschwingvorgang}}+\underbrace{A\cos(\omega_E t-\Delta\phi)}_{\text{stationäre Lösung}}\approx\boldsymbol{A\cos(\omega_E t-\Delta\phi)}$$

Zur Bestimmung der Amplitude A und der Phasendifferenz $\Delta\phi$ wird dieser Ansatz in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$\dot{\varphi}_{getrieben}(t) = -\omega_E A \sin(\omega_E t - \Delta\phi)$$
$$\ddot{\varphi}_{getrieben}(t) = -\omega_E^2 A \cos(\omega_E t - \Delta\phi)$$
$$-\omega_E^2 A \cos(\omega_E t - \Delta\phi) - 2\delta A \sin(\omega_E t - \Delta\phi) + \omega_0^2 A \cos(\omega_E t - \Delta\phi) = M_0 \cos(\omega_E t)$$
$$(\omega_0^2 - \omega_E^2)\cos(\omega_E t - \Delta\phi) - 2\delta \sin(\omega_E t - \Delta\phi) = \frac{M_0}{A}\cos(\omega_E t)$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme lässt sich dieser Ausdruck in folgende Form bringen:

$$\left[(\omega_0^2 - \omega_E^2)\sin\varphi - 2\delta\omega_E \cos\varphi\right]\tan(\omega_E t) = -(\omega_0^2 - \omega_E^2)\cos\varphi - 2\delta\omega_E \sin\varphi + \frac{M_0}{A}$$

Da die linke Seite zeitabhängig und die rechte Seite konstant ist, muss gelten:

$$(\omega_0^2 - \omega_E^2)\sin\varphi - 2\delta\omega_E\cos\varphi = 0$$
$$\boldsymbol{\tan\varphi = \frac{2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}}$$

Die Phasendifferenz ist nun bekannt. Auch die Amplitude lässt sich aus obigen Bedingungen ableiten (ohne Rechnung):

$$A = \frac{M_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}}$$

bzw.

$$\boldsymbol{A = \frac{\varphi_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2\frac{\delta}{\omega_0}\frac{\omega_E}{\omega_0}\right)^2}}}$$

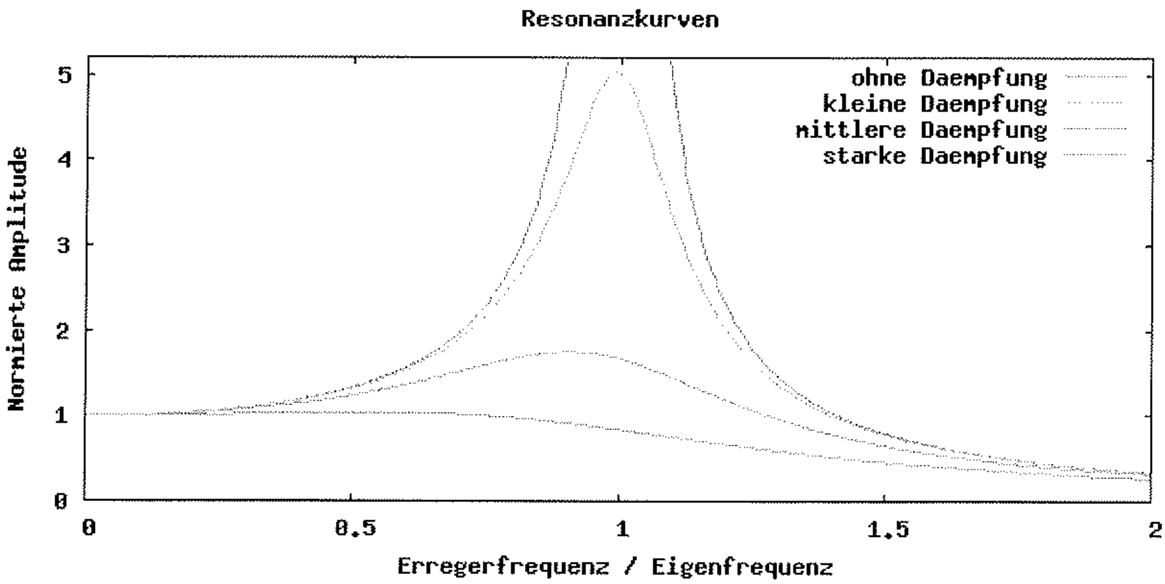
3.3.1 Resonanzkurven

Die Amplitude der getriebenen Schwingung ist also vom Verhältnis der Erregerfrequenz zur Eigenfrequenz und vom Verhältnis der Abklingkonstante zur Eigenfrequenz abhängig.

Zeichnet man für eine bestimmte Dämpfung $\frac{A}{\varphi_0}$ über $\frac{\omega_E}{\omega_0}$, erhält man die Resonanzkurve. Im Fall $\delta = 0$ erhält man ein unendlich hohes Resonanzmaximum. Bei endlicher Dämpfung befindet sich das Maximum der Amplitude nicht bei $\omega_E = \omega_0$, sondern darunter.

$$\text{Höhe der maximalen Amplitude: } max\left\{\frac{A}{\varphi_0}\right\} = \frac{1}{2\frac{\delta}{\omega_0}\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\text{Maximale Amplitude bei } \frac{\omega_E}{\omega_0} = \begin{cases} \sqrt{(1 - 2(\delta/\omega_0)^2)} & \text{wenn } (\delta/\omega_0)^2 < 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



3.4 Schwebungen

Die Schwingungsgleichung des getriebenen Pendels hat, wie oben gezeigt, einen (gedämpften) Lösungsanteil der Eigenschwingung und einen Lösungsanteil der Erregerschwingung.

Während des Einschwingvorgangs beobachtet man also eine Überlagerung dieser beiden Schwingungen, bis die Eigenschwingung irgendwann abgeklungen und das System in den stationären Zustand übergangen ist.

Diese Überlagerung führt zu sogenannten Schwebungen, besonders wenn Eigen- und Erregerfrequenz nahe zusammen liegen.

Eine Schwebung kann mathematisch als Addition zweier Sinusschwingungen mit Frequenzunterschied Δf betrachtet werden. Das Ergebnis ist dann eine Schwingung mit der mittleren Frequenz, die von einer zeitabhängigen Amplitude $A(t)=A_0 \sin(2\pi \cdot \Delta f \cdot t)$ moduliert wird.

Man sieht also, dass die Periode der Schwebung von Δf abhängig ist. Ein kleiner Frequenzunterschied führt zu einer langen Periode und stört die Messung damit für längere Zeit.

4 VERSUCHSANLEITUNG

Vor jedem Versuch ist darauf zu achten, dass der Nullpunkt der Auslenkung richtig eingestellt ist. Dieser kann jederzeit korrigiert werden, indem im Einstellungs-Dialog bei der zugehörigen Größe die Schaltfläche „→ 0 ←“ angeklickt wird.

Es empfiehlt sich, nach jeder Messung, d.h. nach Aufnahme und Auswertung der Daten, die Messung zu speichern (Symbol mit der Diskette in der Symbolleiste). Für jede Messung sollte ein eigener Dateiname verwendet werden. Nach dem Speichern kann eine neue Messung begonnen werden (F4 drücken bzw. das Dokument-Symbol ganz links in der Symbolleiste anklicken).

4.1 Vorbereitung

- Computer einschalten. Beim Starten sollten keinerlei Fehlermeldungen erscheinen.
- Grundgerät mit Spannung versorgen: das dazugehörige Netzgerät muss an die Versorgungsbuchse links unten angesteckt werden.
- Das Grundgerät über das USB-Kabel an den Rechner anschließen. Dafür kann ein vorderer (Frontklappe öffnen) oder hinterer USB-Anschluss verwendet werden.
- Software starten: Doppelklick auf „CASSY Lab“ am Desktop

4.2 Bestimmung der Eigenfrequenz

Die Eigenfrequenz des Pendels ist die Frequenz, mit der das Pendel nach einem Stoß oder nach dem Loslassen aus einer bestimmten Auslenkung von selbst schwingt.

Aufnehmen der Kurve:

- BMW-Wandler an Eingang B des Sensor-CASSY anschließen
- Einstellungen (F5)/CASSY, auf das Symbol der BMW-Box (graues Kästchen mit zwei roten Punkten) klicken, Messgröße „Winkel β_{B1} ($\Delta s = \pm 1\,\mathrm{mm}$)“einstellen, Messbereich: „3 rad“, Radius: „0.095 m“
- Noch immer im Einstellungen/CASSY-Dialog, „Messparameter anzeigen“ klicken: „Automatische Aufnahme“, Intervall: „20 ms“; dann den Dialog schließen

  Überlegen Sie: Welches Messintervall und welche Messdauer sind sinnvoll (ungefähre Eigenfrequenz siehe Kapitel 2.1.1)?
- Pendel auslenken, Messung starten (F9 drücken oder das Symbol mit der Stoppuhr anklicken)
- Pendel ausschwingen lassen
- Die Messung wird nach der angegebenen Messdauer automatisch beendet. Manuelles Stoppen mit F9 bzw. dem Stoppuhr-Symbol möglich.

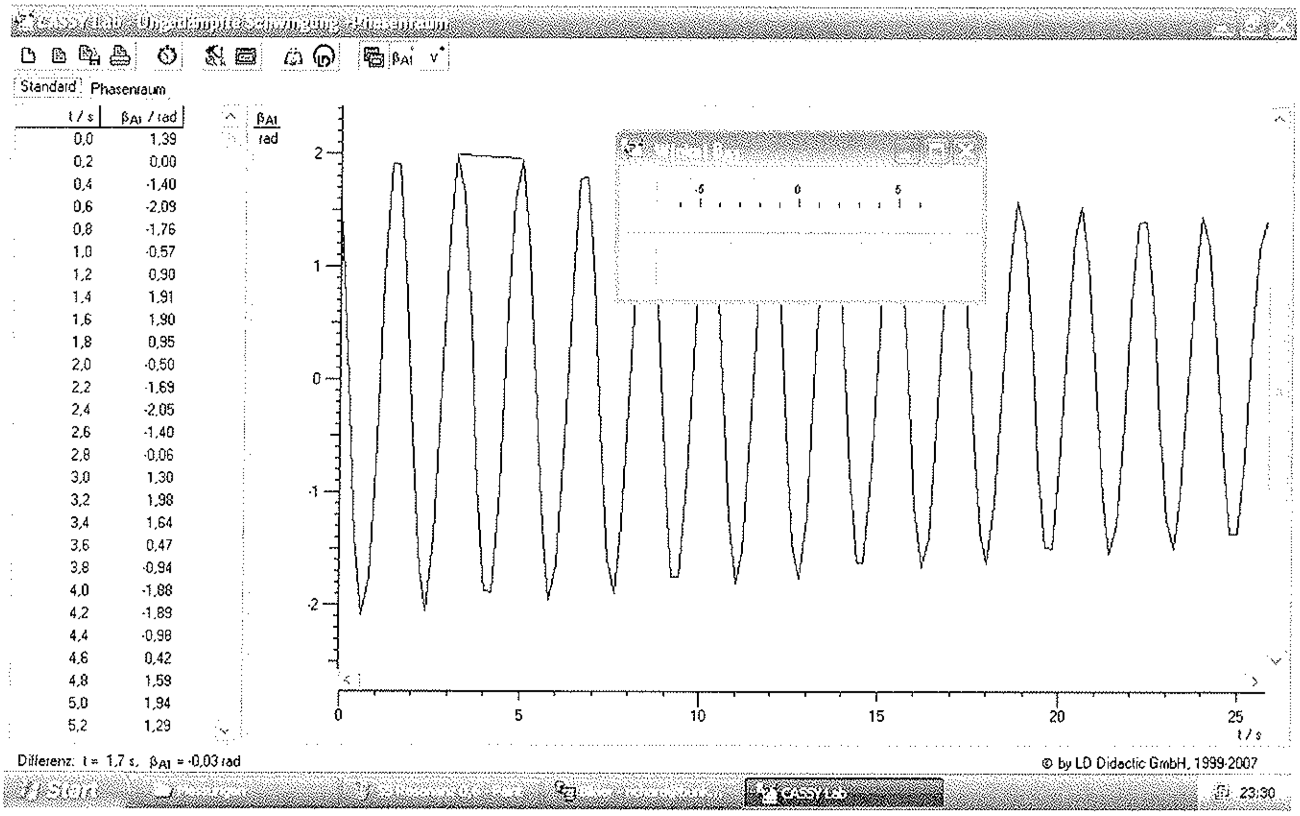


Abbildung 8: Gemessene Schwingung ohne zusäzliche Dämpfung

Auswertung (zeitlichen Abstand zwischen zwei Maxima und damit Eigenfrequenz bestimmen):

- Rechtsklick ins Diagramm, „Zoomen", mit jeweils einem Klick Anfangs- und Endpunkt so setzen, dass einige n Schwingungen in der Messkurve sichtbar sind.
- Rechtsklick ins Diagramm, „Markierung setzen" / „Differenz messen", Anfangspunkt durch Klicken beim ersten Nullpunkt der ersten Schwingung festlegen, Endpunkt beim ersten Nullpunkt der n-ten Schwingung festlegen, Δt in der Statuszeile am unteren Rand ablesen („Differenz t")
- Eigenfrequenz $f = \frac{n}{\Delta t}$

  Welche Genauigkeit ist von der Messung zu erwarten? Wie viele Nachkommastellen sind relevant (Schätzung)?
- Diagramm drucken (Druckersymbol in der Symbolleiste anklicken), Differenzzeit und Eigenfrequenz dazuschreiben

4.2.1 Dämpfungskoeffizient bei Betrieb ohne zusätzliche Dämpfung

Die Schwingung ist natürlich durch die Reibung gedämpft. Die Abklingkonstante wird später benötigt und soll aus der Kurve ermittelt werden.

Das Programm bietet eine Funktion, um dies automatisch durchzuführen:

- Rechtsklick ins Diagramm / Anpassung durchführen / Einhüllende, Anfangspunkt ganz am Anfang durch Klick auf die Kurve festlegen, Endpunkt ganz am Ende durch Klick auf die Kurve festlegen, B aus der Statuszeile ablesen => Abklingkonstante $\delta = 1/B$

Im Kriechfall ist die Kurve bereits die Einhüllende. Die Abklingkonstante kann aber mit dem gleichen Verfahren festgestellt werden.

Zur Überprüfung der Genauigkeit soll die Abklingkonstante auch händisch ermittelt werden:

- Entfernen Sie die vorhin erzeugte Einhüllende: Rechtsklick ins Diagramm, „Letzte Auswertung entfernen"
- Das Dämpfungsdekrement (Amplitudenverhältnis zweier aufeinander folgender Maxima) wird bestimmt. Klickt man in der Kurve auf ein bestimmtes Maximum, kann man den Zahlenwert aus der markierten Zeile in der Tabelle ablesen (beachten Sie die Zeilen darüber und darunter, ob es nicht doch noch einen größeren Wert gibt).
- Berechnen Sie aus dem Dämpfungsdekrement das logarithmische Dämpfungsdekrement und die Abklingkonstante. Um die Genauigkeit zu erhöhen, können Sie auch das Verhältnis zwischen zwei nicht direkt benachbarten Maxima bilden, die Formel lautet dann entsprechend $k^n = \frac{A_1}{A_{n+1}}$.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse der automatischen und der manuellen Berechnung.

Welche Methode ist genauer? Welche Ursachen kann die Ungenauigkeit der Berechnung haben?

4.2.2 Fehlerabschätzung

Welchen Einfluss hat die Dämpfung auf die bestimmte Eigenfrequenz? Berechnen Sie den Fehler!

4.2.3 Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung

Die Software erlaubt es, auch die Ableitungen der Messgrößen zu bilden. Dies kann während der Messung oder in unserem Fall danach geschehen:

- Einstellungen (F5) / Parameter/Formel/FFT, neue Größe „Winkelgeschwindigkeit" anlegen: zeitliche Ableitung von β_{B1}, Symbol „&w" für das kleine Omega, Bereich -10..10
- Analog wird die Größe „Winkelbeschleunigung" mit Symbol „α" als zeitliche Ableitung der Winkelgeschwindigkeit angelegt.

Der Phasenzusammenhang der drei Größen kann besser gesehen werden, wenn in die Kurve hineingezoomt wird (Vorgangsweise siehe oben).

Sollten die Kurven mit den Ableitungen „zackig" aussehen, führen Sie eine neue Messung mit einem größeren Messintervall (z.B. 200 ms) durch und lassen dort wieder Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung anzeigen.

Wie hängen Auslenkung, Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung zusammen?

4.3 Schwingung bei verschiedenen Dämpfungen

- Wirbelstrombremse in Betrieb nehmen: 0..2A-Ausgang des Netzteils mit Eingang A als Amperemeter und Wirbelstrombremse verbinden. **Achtung**: Der Elektromagnet darf nur kurze Zeit mit mehr als 1 A betrieben werden, da er sonst beschädigt wird!
- Eingang A als Amperemeter anschließen. Einstellungen (F5)/CASSY, auf Eingang A klicken, Messgröße „I_{A1}" einstellen, Messbereich „0..3 A", Messwerterfassung: „gemittelte Werte über 100 ms". Damit der Strom nicht in den Graphen erscheint, muss er im Einstellungen-Dialog unter „Darstellung" entfernt werden: zweite y-Achse auf „aus" statt „I_{A1}" stellen.

Wie wird ein Amperemeter angeschlossen? Wie ein Voltmeter?

- Schwingungen mit verschiedenen Dämpfungen aufnehmen (Vorgangsweise siehe Kapitel 4.2). Sinnvoll sind: keine Dämpfung (voriger Versuch), schwache Dämpfung, starke Dämpfung, Kriechfall mit 1,5 A (nur kurz!)
- Bestimmen Sie für jede Messung mit beiden Methoden die Abklingkonstante. Dann speichern, drucken und die Auswertungsergebnisse dazuschreiben.

Wie ändert sich die Abklingkonstante als Funktion des Spulenstroms? Wie kann dieser Zusammenhang theoretisch erklärt werden?

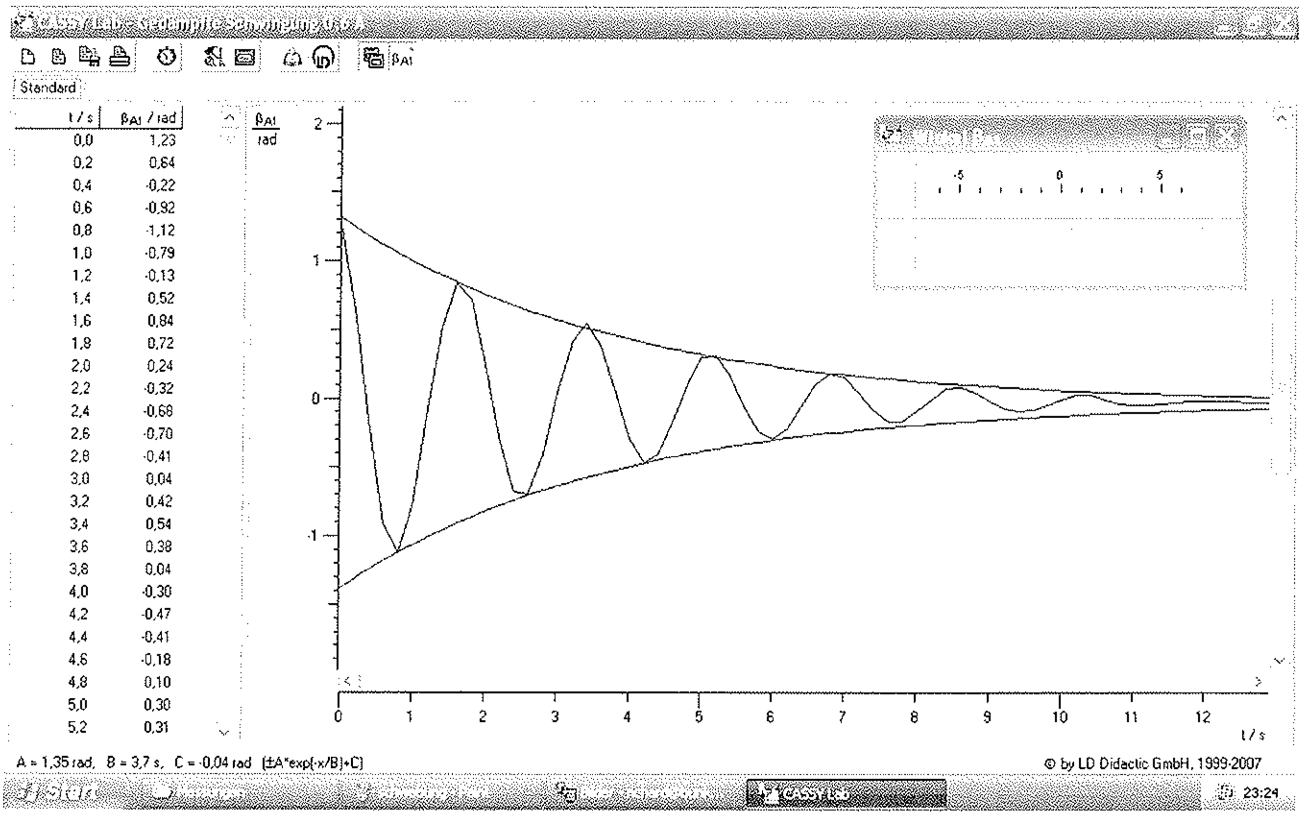


Abbildung 9: Gemessene gedämpfte Schwingung mit Einhüllender

4.4 Zusammenhang Erregerfrequenz / Erregerspannung

Die Erregerfrequenz kann mit dem Messaufbau nicht direkt gemessen werden.

> *Kann die Erregerfrequenz indirekt gemessen werden? Wie hängen Erregerfrequenz und Pendelfrequenz zusammen? Schätzen Sie den Fehler ab, wenn die Pendelfrequenz anstatt der Erregerfrequenz gemessen wird.*

Messen Sie die Frequenzen bei einigen Spannungen und fertigen Sie eine Tabelle an:

- Motor mit Spannung (=Erregerspannung) versorgen (0..24 V)
- Erregerspannung vom Motor abgreifen und mit Eingang A messen: Einstellungen/CASSY, Eingang A: Spannung U_{A1}, Messbereich -30 .. 30V
- Gehen Sie beim Messen der Pendelfrequenz in Abhängigkeit der Erregerspannung so vor wie beim Messen der Eigenfrequenz (Kapitel 4.2).
- Geben Sie diese Tabelle nach folgender Anleitung in CASSYLab ein und fertigen Sie ein Diagramm an:

4.4.1 Manuelles Erstellen von Tabelle und Diagramm mit CASSYLab

CASSYLab bietet die Möglichkeit, nicht nur vom Sensor erfasste Messwerte aufzunehmen und darzustellen, sondern es können auch ein oder mehrere manuelle Werte pro Messung eingegeben werden (z.B. Parameter, die für die Messung relevant sind, aber nicht von den angeschlossenen Sensoren aufgenommen werden können). Es ist sogar möglich, nur manuelle Werte einzugeben. Das kann dazu verwendet werden, um ein Diagramm zu Messdaten zu erstellen.

In unserem Fall werden die oben gemessenen Wertepaare Erregerspannung / Frequenz eingegeben und graphisch dargestellt.

- Messdaten und Einstellungen in CASSY löschen: zwei Mal F4 drücken bzw. das Symbol ganz links in der Symbolleiste doppelklicken
- Festlegen der Parameter (Tabellenspalten): Einstellungen (F5) / Parameter/Formel/FFT, neue Größe anlegen: „Erregerspannung", „Parameter" auswählen (dadurch können die Werte manuell eingegeben werden), Symbol, Einheit und Messbereich einstellen; noch eine neue Größe anlegen: „Pendelfrequenz", wieder als „Parameter" einstellen und die restlichen Einstellungen durchführen.
- Noch immer im Einstellungs-Dialog: ganz unten „Messparameter anzeigen" anklicken, „manuelle Aufnahme" einstellen und „Schließen". Das bewirkt, dass beim Starten der Messung nicht automatisch Messpunkte in einem bestimmten Zeitintervall aufgenommen werden, sondern dass bei jedem „Messung starten/stoppen" nur ein Messwert angehängt wird. Dieser kann dann in der Tabelle bearbeitet werden (sofern es sich um einen Parameter handelt).
- Nachdem der Einstellungs-Dialog geschlossen wurde, können die Messpunkte eingegeben werden. Für jeden Messpunkt muss das „Messung starten/stoppen"-Symbol angeklickt bzw. F9 gedrückt werden. Dann erscheint in der Tabelle eine neue Zeile. In dieser Zeile kann man auf die jeweilige Spalte, die bearbeitet werden soll, doppelklicken, den neuen Wert eingeben und mit der Eingabetaste festlegen.

- Jeder eingegebene Messpunkt wird sofort in die Messkurve aufgenommen. Damit die Punkte selbst angezeigt werden, muss folgende Option aktiviert sein: Rechtsklick in die Kurve/ „Werteanzeige"/ „Werte einblenden". Wenn die Verbindungslinien eingeblendet sind (Rechtsklick in die Kurve/ „Werteanzeige"/ „Verbindungslinien anzeigen"), ist die Reihenfolge der Messwerte relevant. Wählen Sie die Einstellungen für die Darstellung, die die Messwerte am besten erkennen lässt.
- Um den linearen Zusammenhang zwischen Erregerspannung und -frequenz optimal zu beschreiben, wird eine **Ausgleichsgerade** benötigt. Mit CASSYLab kann diese wie folgt erstellt werden: Rechtsklick in die Kurve/ „Anpassung durchführen"/ „Ausgleichsgerade". Dann Anfang und Ende durch jeweils einen Klick auf den Anfangs- bzw. Endpunkt der Kurve festlegen und die Ausgleichsgerade wird berechnet. Steigung und Nullpunktshöhe werden in der Statuszeile angezeigt.
- Wenn alle Messpunkte eingegeben und die Darstellung der Kurve in Ordnung ist, wird das Diagramm gedruckt (auf das Druckersymbol klicken).

4.5 Resonanzkurve bei verschiedenen Dämpfungen

Hier wird die Amplitude der angetriebenen Schwingung in Abhängigkeit der Erregerfrequenz gemessen, wiederum bei verschiedenen Dämpfungen.

Die Erregerfrequenz braucht nicht mehr gemessen zu werden, sondern kann mit dem oben gefundenen Zusammenhang aus der Erregerspannung berechnet werden.

- Für verschiedene Erregerspannungen wird die jeweilige Frequenz berechnet und die Amplitude gemessen.
- Die Messung der Amplitude wird nicht automatisch durchgeführt, da CASSYLab keine einfache fertige Funktion dafür bietet. Stattdessen gehen Sie wie beim Messen der Eigenfrequenz (Kapitel 4.2) vor. Es wird aber nicht die Frequenz gemessen, sondern die Amplitude. Diese kann direkt aus der Tabelle bzw. Kurve ermittelt werden, indem das Maximum gesucht wird.
- Die Messergebnisse werden wieder manuell in eine CASSYLab-Tabelle eingetragen und eine Kurve gezeichnet (siehe Kapitel 4.4.1).

Diese Messung ist wieder bei verschiedenen Dämpfungen durchzuführen.

4.5.1 Beobachtung der Phasendifferenz

Beobachten Sie das Verhalten der Phasendifferenz zwischen Erreger und Pendel und vergleichen Sie mit der Formel aus Kapitel 3.3.

Wie verhalten sich die Phasen von Erreger und Pendel zueinander?