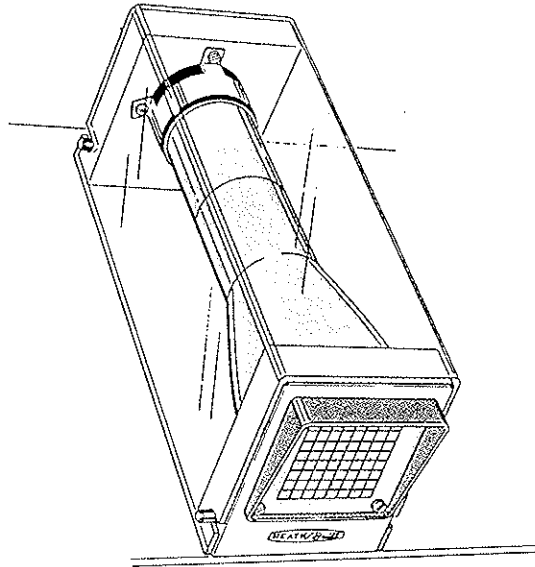


Praktikumsplatz Nr: 63, 64, 65

ELEKTRONEN IN ELEKTRISCHEN UND MAGNETISCHEN FELDERN



Dieser Praktikumsplatz soll die Funktionsweise von Oszilloskopröhren, Dioden- bzw. Triodensystemen näherbringen. Die Versuche sollen quantitativ und qualitativ die Möglichkeiten der Beeinflussung von Elektronenstrahlen durch Anlegen elektrischer und magnetischer Felder zeigen.

- ◇ Bestimmung der Plattengeometrie (l/h) für horizontales und vertikales Ablenkplattenpaar
- ◇ Überprüfung der spezifischen Elementarladung e/m (3 Ergebnisse)
- ◇ Überprüfung der Elektronengeschwindigkeit durch die Kompensationsmethode

Barbara Hirss

Wien, 1992

corr. Sept.2008, H.Sassik

INHALTSANGABE

1. ZUR VERFÜGUNG STEHENDE GERÄTE	4
2. THEORIE	7
2.1. THEORIE ZU VERSUCH 3.1.	7
2.2. THEORIE ZU VERSUCH 3.2.	7
2.3. THEORIE ZU VERSUCH 3.3.	8
3. VERSUCHE	10
3.1. ERZEUGUNG UND FOKUSSIERUNG VON ELEKTRONENSTRAHLEN	10
3.2. ABLENKUNG IM ELEKTRISCHEN FELD	11
3.3. ABLENKUNG IM MAGNETISCHEN FELD	12
3.4. KOMPENSATIONSMETHODE.....	16
3.5. SPIRALBEWEGUNG VON ELEKTRONEN.....	17
4. FADENSTRAHLROHR - TEAMWORKVERSUCH.....	19
5. ANHANG	21
5.1. BESCHREIBUNG DER OSZILLOSKOPRÖHRE	21
5.2. HEATHKIT.....	24
5.3. ANALOGES MULTIMETER	25
5.4. SCHALTBILD FÜR VERSUCH 3.3.....	25
5.5. THEORIE.....	26
5.6. FEHLERRECHNUNG	30

MAN INFORMIERE SICH VOR DER ÜBUNG ÜBER:

- ✧ Verhalten von Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern; Coulombkraft, Lorentzkraft, Gesetz von Biot-Savart - siehe dazu auch Kapitel 2 dieser Anleitung
- ✧ Erzeugung und Formierung freier Elektronenstrahlen; Aufbau und Funktion von Elektronenstrahl-Erzeugungssystemen zB Oxidkathode, Wehneltzylinder (bzw. control-grid), Elektronenlinse, Rekombinationsvorgänge, ... **Fadenstrahlrohr** (Grundlagenvorlesung; Ph I; ab Seite 19 als Teamwork-Versuch)
- ✧ Strom und Spannungsmessung, Shunt (siehe Anhang)
- ✧ Zu lernen sind selbstverständlich auch Versuchsprinzipien
- ✧ Anwendungen: Oszi (x,t-Betrieb, x,y-Betrieb, Trigger), TV-Röhre, Farb-TV-Röhre, Zyklotron, Massenspektrograph
Beschreibung der Oszilloskoprhöhre ab Anhang, Seite 21

INS PROTOKOLL GEHÖREN UNBEDINGT:

- ✧ kurze Beschreibungen der Versuche und der gestellten Probleme
- ✧ Die Ergebnisse der Versuche und die dazu geforderten Diagramme auf Millimeterpapier
- ✧ Eine Diskussion der Ergebnisse
- ✧ Eine Fehlerabschätzung des Ergebnisses, mit einer kurzen Begründung (Welche Meßgrößen sind die größten Fehlerquellen, warum); Bei Endergebnissen Angabe von Mittelwert und dessen Standardabweichung
- ✧ die in der Anleitung mit ✍ gekennzeichneten Aufforderungen

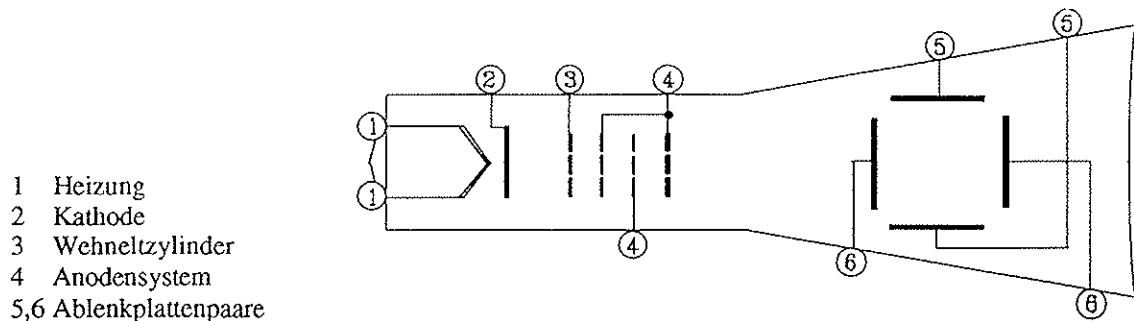
LITERATUR DAZU:

- ✧ allg: jedes Grundlagenbuch der Physik
- ✧ Gerthsen - Kneser - Vogel: "Physik"; siehe Anhang, Seite 26
- ✧ Walcher: "Praktikum der Physik"; siehe Anhang, Seite 29
- ✧ Demtröder W., „Experimentalphysik II“ Springer, 4th edition.
(Lorentzkraft, Biot-Savart etc)
- ✧ Demtröder W., „Experimentalphysik III“ Springer, 4th edition.
(Lorentzkraft, Glühemission, freies Elektron – Energie etc)

1. ZUR VERFÜGUNG STEHENDE GERÄTE

✧ Eine Oszilloskopröhre

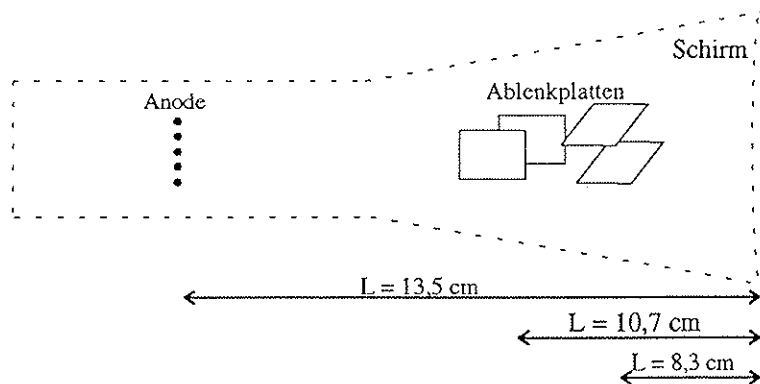
Beschreibung siehe Anhang, Seite 21



Achtung:

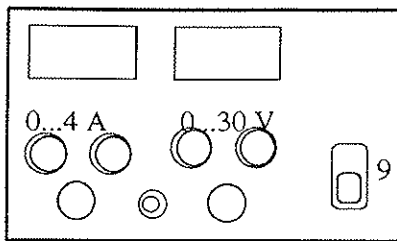
Bei den einzelnen, für verschiedene Problemstellungen erwähnten Distanzen bzw. Längen, handelt es sich um verschiedene Abmessungen. Vergiß nicht die **äußeren** Abmessungen des Aufbaus (Länge der Spule, Durchmesser der Spulen, Abstand zwischen Spule-Schirm,...) zu messen. Diese Messungen sollten möglichst exakt durchgeführt werden.

Die Abmessungen **innerhalb** der Röhre sind in folgender Skizze eingetragen:



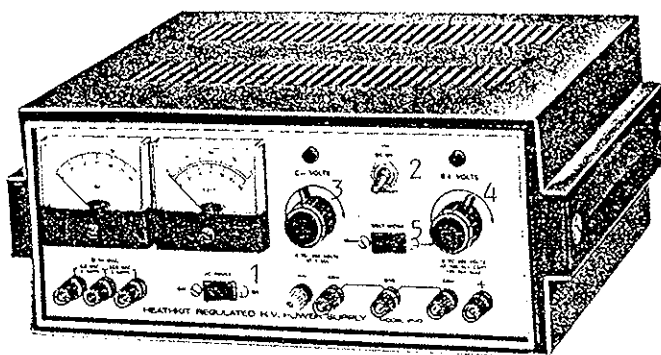
✧ Spulenpaar

❖ Stromversorgung für die Spulen (LNG 191/3)



9 Power OFF/ON

❖ Spannungsversorgung für die Röhre (Heathkit)
 Genauere Beschreibung im Anhang, Seite 24

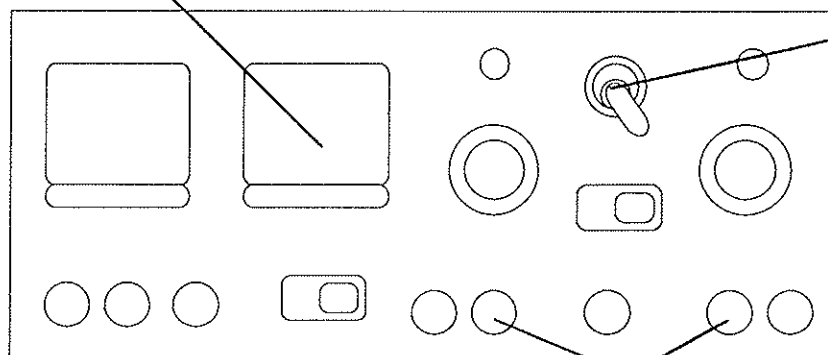


- 1 AC-Power OFF/ON
- 2 Power DC für U_B, U_C
- 3 Regler für U_C
- 4 Regler für U_B
- 5 Anzeigenumschalter

Duale Skala
 0 - 400 Volt Skala
 (rot) zeigt die Werte
 für die Spannung
 U_B - allerdings nur
 dann, wenn Schalter
 5 sich in der B-
 Stellung befindet;
 dann leuchtet auch
 das
 Kontrollämpchen b

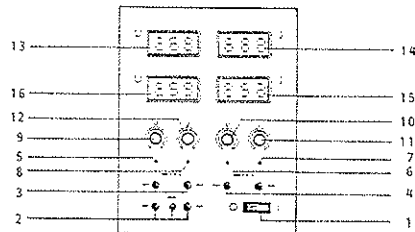
0-150 Volt Skala
 (schwarz) zeigt
 entsprechend die
 Spannung U_C an

DC-Schalter
 kann auf ON oder Standby=OFF stehen. Dieser ist vor
 dem ersten Aufbau und bei jedem Umbau auf jeden
 Fall auf Standby zu stellen.



C+ und B- sind intern verbunden - aber nicht mit Masse
 (GND) wie es fälschlicher Weise am Gerät gezeichnet ist.

- ◇ Spannungsversorgung für die Ablenkplatten und dem Wehneltzylinder
nur SIEMENS EB 11 aus E-Block oder Tischgerät !



- | | |
|-------|---|
| 1 | Einschalter mit Kontrolleuchte |
| 2 | Laborklemmen Abnahme Festspannung |
| 3-4 | Laborklemmen Abnahme regelbare Spannung |
| 5-6 | LED Spannungsbegrenzung |
| 7-8 | LED Strombegrenzung |
| 9+10 | Poti für Spannungseinstellung |
| 11+12 | Poti für StromEinstellung |
| 13+14 | Digitalanzeige für Spannung |
| 15-16 | Digitalanzeige für Strom |

- ◇ Multimeter (ein digitales, ein analoges)

Beschreibung und Skizze des analogen Multimeters findet sich im Anhang , Seite 25

A C H T U N G

Die bei diesem Versuch auftretenden **Spannungen und Ströme** befinden sich in einem für den Menschen gefährlichen Bereich!!!!

Berührung der Kontaktstellen ist im Betrieb auf jeden Fall zu vermeiden!!!!

Eine weitere Gefahrenquelle: Bei Beschädigung der Röhre: **Implosionsgefahr!!!**

2. THEORIE

Die, dieses Kapitel umfassenden Theorieabschnitte, dienen zur umfassenden Wiederholung. Jeder sollte sich bereits mit den Themen der elektrischen und magnetischen Beeinflussung von Elektronenstrahlen auseinandergesetzt haben - spätestens zur Vorbereitung dieses Praktikumsplatzes.

2.1. THEORIE ZU VERSUCH 3.1.

Erzeugung von Elektronenstrahlen.

Wenn man die (von einer Kathode ausgehenden) Elektronen durch Anlegen einer Spannung beschleunigt, dann ist der Zusammenhang zwischen der Elektronengeschwindigkeit und der Beschleunigungsspannung

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

Leite diesen Zusammenhang her. (Der einfachste Weg geht über den Energiesatz)

Muß in diesem Versuch der relativistische Massenzuwachs berücksichtigt werden, wenn es sich dabei um Beschleunigungsspannungen unter 500 V handelt?

2.2. THEORIE ZU VERSUCH 3.2.

elektrische Ablenkung

Einen durch eine Dioden- bzw Triodenanordnung erzeugten Strahl kann man durch ein transversales elektrisches Feld, verursacht durch Kondensatorplatten (wie schaut ein solches Feld aus?), ablenken.

Leite die Bewegungsgleichung eines Elektrons der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in einem transversalen elektrischen Feld ab.

$$\vec{v} = (0, 0, v_z); \quad \vec{E} = (0, E_y, 0)$$

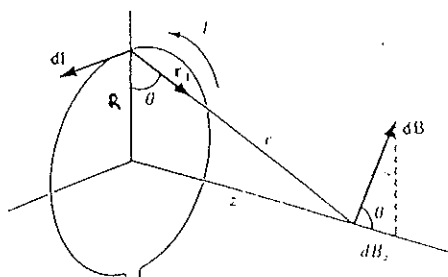
Anleitung: Die Coulombkraft ($\vec{F} = q \cdot \vec{E}$) wirkt so lange auf ein e^- , solange sich dieses im Kondensator befindet. Diese Zeit wird durch die x - Komponente der Geschwindigkeit und die Länge l der Platten bestimmt.

2.3. THEORIE ZU VERSUCH 3.3;

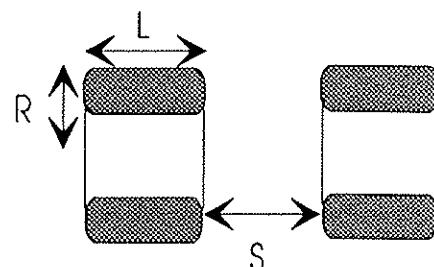
Gesetz von Biot-Savart

Das magnetische Feld, das an einem Punkt im Abstand r herrscht, und von einem Leiterstück $d\vec{l}$, das vom Strom I durchflossen wird, erzeugt wird, ist durch das Gesetz von Biot-Savart gegeben.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

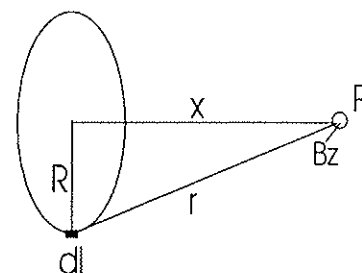


Unser Versuch sieht folgendermaßen aus:
zwei Spulen - der Länge L , mit dem Radius R - stehen im Abstand S voneinander
gesucht ist das Magnetfeld in einem axialen Punkt der Entfernung x



$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \quad r^2 = R^2 + x^2$$

Aufgrund der Zylindersymmetrie heben sich die Feldkomponenten parallel zur Kreisebene auf



$$dB_z = dB \cos \varphi = dB \frac{R}{r}$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2 + x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cdot dl}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad \int dB_z = \int_0^{2R\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cdot dl}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$B_z(x)$ ist das Feld EINER Leiterschleife im Abstand x . Das Feld der beiden Spulen setzt sich aus der Überlagerung von vielen infinitesimalen Leiterschleifen zusammen. Der in einer solchen Leiterschleife fließende Strom ist nicht I , sondern: $(I \cdot N/L) dx$

$$B^* = 2 \int_{s/2}^{s/2+L} B_z dx \frac{N}{L} \quad \text{da 2 Spulen}$$

$$B^* = \frac{\mu_0 IN}{L} \int_{s/2}^{s/2+L} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{\mu_0 IN R^2}{L} \frac{x}{R^2 \sqrt{R^2 + x^2}} \Big|_{s/2}^{s/2+L}$$

$$B^* = \frac{\mu_0 IN}{L} \left(\frac{s/2 + L}{\sqrt{R^2 + (s/2 + L)^2}} - \frac{s/2}{\sqrt{R^2 + (s/2)^2}} \right)$$

magnet. Ablenkung

Warum kommt es in homogenen Magnetfeldern zur Ausbildung von kreis- bzw. spiralförmige Elektronenbahnen?

Anleitung: Löse die Differentialgleichung $m\dot{\vec{v}} = q\vec{v} \times \vec{B}$; (Zyklotronfrequenz)

(Funktionsweise eines Zyklotrons ?)

Wie hängt der Kreisbahnradius r von der Elektronengeschwindigkeit v und der magnetischen Flußdichte B ab? (Wenn die Geschwindigkeit senkrecht auf das Magnetfeld ist)

Anleitung: Setze die Zentripetalkraft mit der Lorentzkraft gleich

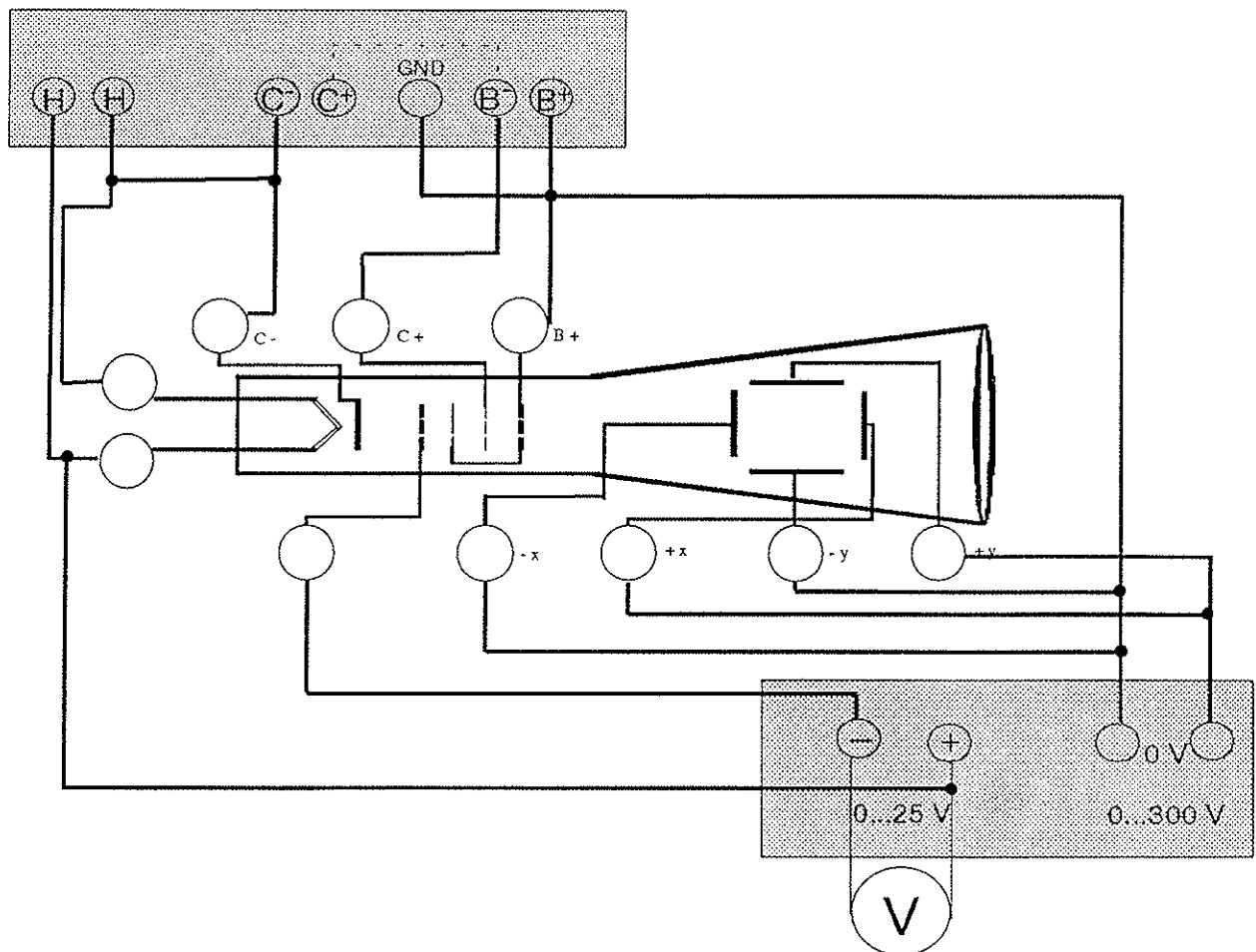
$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

Leite mit Hilfe der letzten Gleichung auch einen Zusammenhang zwischen der spezifischen Elementarladung (e/m) und den Parametern B und U_2 her.

3. VERSUCHE

3.1. ERZEUGUNG UND FOKUSSIERUNG VON ELEKTRONENSTRAHLEN

3.1.1. Versuchsaufbau



- Vor Inbetriebnahme ist ausnahmslos und unbedingt eine **Kontrolle** durch den Betreuer durchzuführen !
- Überlege Dir, wo **gefährliche Spannungen** auftreten !
 (z.B.: da die Anode auf Erde (=GND) liegt, ist die Kathode auf bis zu -550 V und damit die Wehneltzylinderspannung auf bis zu -554,5 V!)
- Bei jedem Umstecken ist **AUF JEDEN FALL** die **Beschleunigungsspannung** abzuschalten (□2); ca. 10 sec. warten.

Schalte zuerst die Heizspannung [Schalter $\square 1$] von 6.3V \sim ein. Nach ca. 1 Minute (Kathode beginnt zu glühen) kann die Wehneltzylinderspannung (4,5 V; negativ gegenüber der Kathode!) eingeschaltet und das geeignete Verhältnis der beiden Anodenspannungen gewählt werden [$\square 2$, $\square 6$ für Power ON; $\square 3$, $\square 4$, $\square 7$ zum Variieren der Spannungen] Durch die Elektronenlinse - eben durch den Zusammenhang von U_B und U_C - kann der Strahl fokussiert werden. Für diesen ersten Versuch müssen die in der Röhre befindlichen Ablenkplattenpaare auf Anodenpotential U_B gelegt werden. Die Beschleunigungsspannung U_2 setzt sich aus der Summe von U_B und U_C zusammen.

Miß die Wehneltzylinderspannung mit Multimeter; für die Spannungen U_B und U_C gibt es am Gerät eine Anzeige - zum Umschalten dient $\square 5$

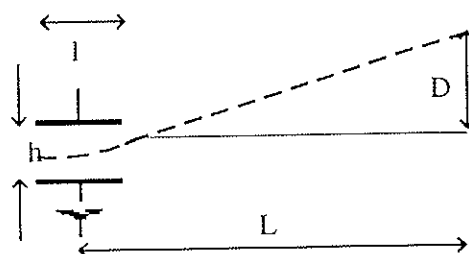
3.2. ABLENKUNG IM ELEKTRISCHEN FELD

Zu beobachten ist die quantitative Auslenkung des Strahles bezüglich seiner Anfangsposition für verschiedene Ablenkspannungen U_p

3.2.1. Versuchsaufbau und Beschreibung

Geometrie der Anordnung: $\tan\theta = \frac{D}{L} \approx \frac{v_x}{v_z} = \frac{U_p t}{U_2 2h}$

wobei: U_p ... Plattenspannung
 U_2 .. Beschleunigungsspannung



3.2.2. Versuchsdurchführung

Miß die Auslenkung des Strahles bezüglich seiner ursprünglichen Ruhelage für verschiedene Ablenkspannungen, geregelt mit $\square 8$, gemessen mit Multimeter. Pole auch die Anschlüsse um und führe Messungen für beide Plattenpaare durch. Beachte dabei die verschiedenen Werte für L; Platten für horizontale Ablenkung: 10, 7 cm, vertikale Ablenkung: 8,3 cm

PROTOKOLLANLEITUNG

◇ Zeichne $\tan\theta$ als Funktion der Ablenkspannung (mind. 4 Punkte);

als Parameter: einige (mind. 2) Beschleunigungsspannungen $U_2 = U_B + U_C$

◇ Bestimmung der Plattengeometrie l/h :

Zeichne l/h als Funktion von U_p (Parameterwahl wie unter 1.)

◇ Berechne die Geschwindigkeiten v_z für die verschiedenen Beschleunigungsspannungen

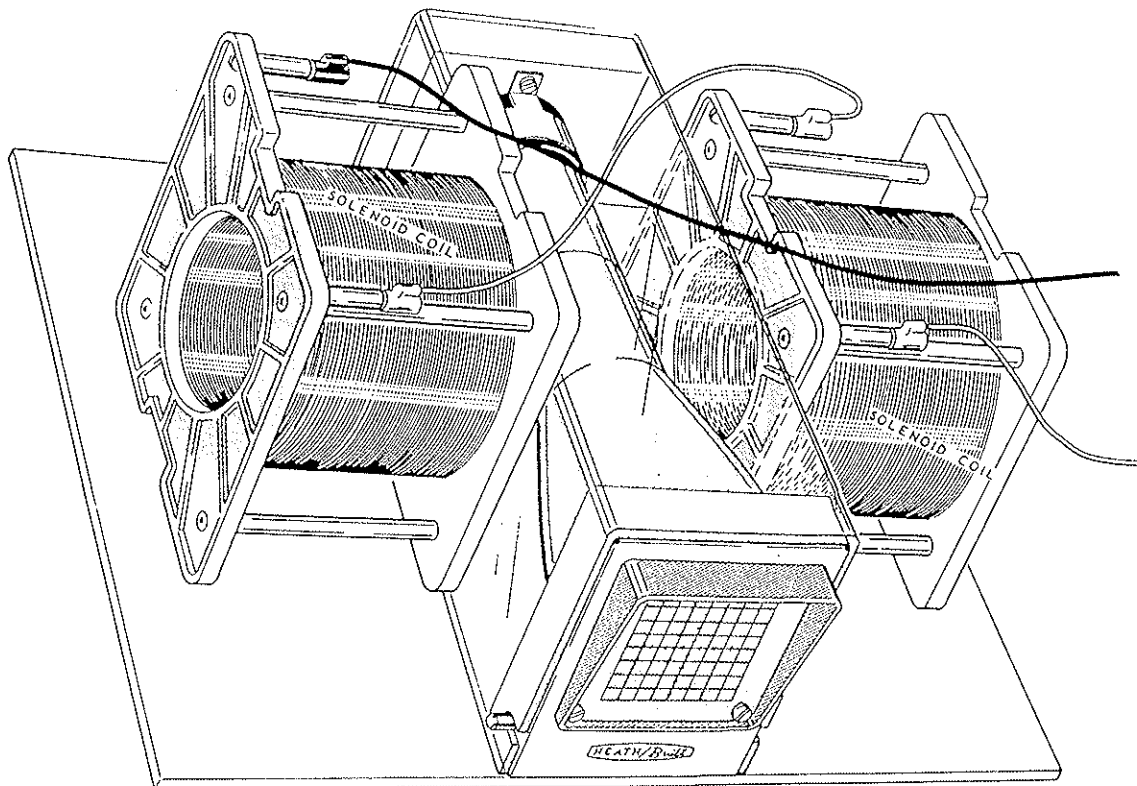
$$v_z = \sqrt{\frac{2eU_2}{m}} \quad e/m = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$$

◇ Berechne die transversalen Ablenkungsgeschwindigkeiten aus $v_x = v_z \tan\theta$

3.3. ABLENKUNG IM MAGNETISCHEN FELD

3.3.1. Versuchsaufbau

Stelle die Spulen an die Seiten der Röhre und achte dabei auf die Markierung auf der Halterung.



Anschlüsse der Röhre bleiben gleich; Änderungen: Die Ablenkplatten werden wieder auf Anodenpotential gelegt. Dann wird die Stromversorgung über das Netzgerät LNG 191/3 (Strom mit digitalem Multimeter messen!) an die Spulen angeschlossen. Achte dabei darauf, daß beide Spulen vom Strom in gleicher Richtung durchflossen werden.

Schaltbild siehe Anhang Seite 25

Der Einbau eines SHUNTS kann die Regelung durch das Potentiometer (0-4 A) empfindlicher gestalten. Achte auf die Strommessung !- diese erfolgt dann im mA-Bereich!

3.3.1. Geometrie der Anordnung und Näherungen für unseren Fall:

Die Elektronen bewegen sich in diesem Versuch durch ein transversales homogenes Magnetfeld. Allerdings beschreiben sie keine vollständige Kreisbahn, sondern nur einen kleinen Ausschnitt aus einer großen, schwach gekrümmten Kreisbahn (siehe Skizze). Dies gestattet einige vereinfachende Annahmen, die die Berechnung erleichtern:

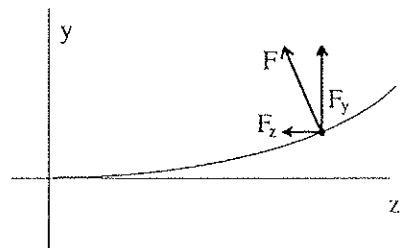
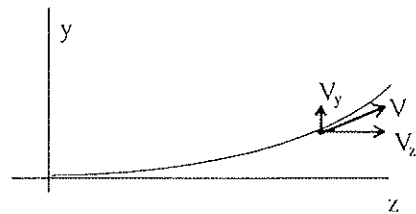
$$B_x = B$$

$$B_y = B_z = 0$$

$$F_x = q (v_y B_z - v_z B_y)$$

$$F_y = q (v_z B_x - v_x B_z)$$

$$F_z = q (v_x B_y - v_y B_x)$$



Das Magnetfeld liegt parallel zur x-Achse. Die y-Komponente der Geschwindigkeit ist klein gegenüber der z-Komponente, also $v_y \ll v_z$. Daher ist auch die z-Komponente der Lorentz-Kraft klein gegenüber der y-Komponente, und die z-Komponente der Geschwindigkeit bleibt nahezu unverändert, also $v_z \approx \text{konst.}$ Somit folgt, daß die y-Komponente der Kraft gleichbleibt, d.h. daß die Elektronenbewegung in Längsrichtung unbeschleunigt bleibt und in y-Richtung gleichförmig beschleunigt wird. Daraus folgt schließlich, daß der Kreisabschnitt durch eine Parabel angenähert werden kann.

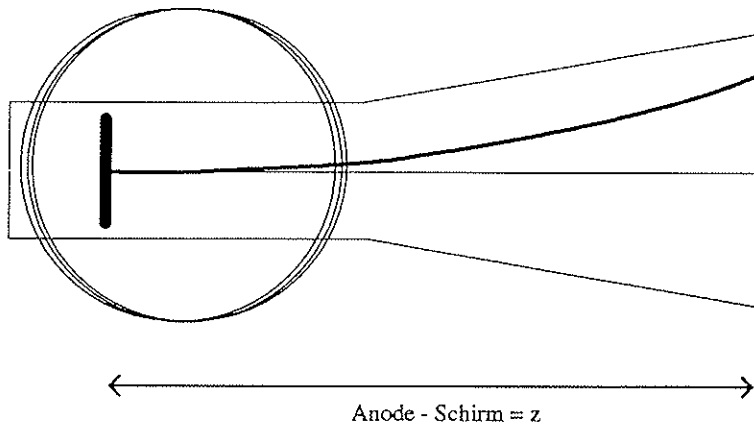
$$F = qv_z B = m\dot{v}_y$$

$$v_y = \frac{q}{m} \int_0^t B v_z dt = \frac{q}{m} \int_0^z B dz$$

Wir müssen nun noch eine zweite Näherung einführen:

Die Abgrenzung des Magnetfeldes ist komplizierter zu wählen als die von den Kondensatorplatten. Unser Versuch liegt innerhalb zweier Extrema:

1. Die Wirkungssphäre des Magnetfeldes erstreckt sich über die gesamte Röhre:

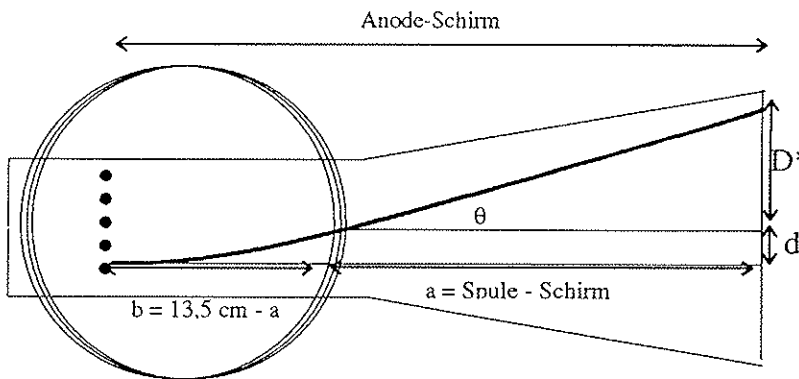


$$D = \int_0^z v_y dt = \frac{1}{v_z} \int_0^z v_y dz$$

$$v_y = \frac{q}{m} Bz$$

$$D = \frac{q}{m} \frac{Bz^2}{2} \frac{1}{v_z}$$

2. Die Wirkungssphäre des Magnetfeldes liegt exakt im Raum zwischen den Spulen, also innerhalb des Durchmessers.



$$D = d + D'$$

$$d = \frac{q}{m} \frac{Bz^2}{2} \frac{1}{v_z}$$

$$v_y = \frac{q}{m} Bb \quad v_z = \sqrt{\frac{2qU_2}{m}}$$

$$\frac{v_y}{v_z} = \frac{D'}{a} = \tan \theta \Rightarrow D' = \sqrt{\frac{q}{m}} Bb \frac{a}{\sqrt{2U_2}}$$

$$D = \sqrt{\frac{q}{m} \left(\frac{1}{\sqrt{2U_2}} \frac{Bb^2}{2} + \frac{Bba}{\sqrt{2U_2}} \right)}$$

$$\Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{D^2 8U_2}{(Bb^2 + 2Bba)^2}$$

3.3.2. Versuchsdurchführung

Messe D und I_S

mind. 4 verschiedene Wertepaare

je für 2 verschiedene Beschleunigungsspannungen

PROTOKOLLANLEITUNG

◇ Messe und zeichne die Ablenkung D als Funktion des Stromes I_S in den Spulen

◇ Zeichne die Ablenkung D als Funktion von $\frac{I_S}{\sqrt{U_2}}$

◇ Berechne die magnetische Flußdichte B für verschiedene Spulenströme I_S

$$B^* = \frac{\mu_0 I N}{L} \left(\frac{s/2 + L}{\sqrt{R^2 + (s/2 + L)^2}} - \frac{s/2}{\sqrt{R^2 + (s/2)^2}} \right) \quad \mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$$

N ...3400 Windungen;

I ...gem. Spulenstrom in A

L ...Länge **einer** Spule

s ...Abstand zwischen den beiden Spulen

R ...Radius der Spulen

◇ Bestimme die spezifische Elementarladung e/m für beide Näherungen der Wirkungssphäre des Magnetfeldes

$$1. \frac{e}{m} = \frac{D^2 \cdot 8U_2}{B^2 \cdot z^4}$$

$$2. \frac{e}{m} = \frac{D^2 8U_2}{(Bb^2 + 2Bba)^2}$$

wobei $B = B^*$ in T

U_2 ...Beschleunigungsspannung in V

D ...Ablenkung in m

z ...Distanz Anode Schirm: 0,135 m

b ...Wirkungsbereich 0,06 m

a ...Nicht-Wirkungsbereich 0,075 m

(a , b sind für jeden Versuch extra zu überprüfen und eventuell auszubessern.)

Bestimme die Mittelwerte der beiden Näherungen (1), (2) mit deren Standardabweichungen und vergleiche ob der Literaturwert ($1,759 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$) innerhalb der beiden mathematischen Extremfälle liegt.

3.4. KOMPENSATIONSMETHODE

Eines der in der Röhre befindlichen Ablenkplattenpaare kann bei geeigneter Polung die - durch das Magnetfeld - gekrümmte Bahn des Elektronenstrahles wieder "geradebiegen". (Auf diesem Prinzip arbeitet auch der Wiensche Geschwindigkeitsfilter.) In diesem Fall kompensieren sich elektrische und magnetische Kräfte und es gilt:

$$qvB = qE$$

3.4.1. Versuchsdurchführung

Ablenkplattenspannung wird wie gewohnt mit $\square 8$ geregelt und mit Voltmeter gemessen, die Spulen weiterhin mit dem LNG-Netzgerät gespeist und mit Amperemeter gemessen.

Beschleunigungsspannung und Helmholtzspulenstrom werden fix gewählt, und die Ablenkspannung so lange verändert, bis die Nullpunktlage wieder erreicht wird.

PROTOKOLLANLEITUNG

- ◇ Gib mehrere Beispiele für B und U_p an (mind. 3); vergiß nicht, auch die Beschleunigungsspannungen zu messen (für den Vergleich)
- ◇ Miß bei der aufgeschnittenen Röhre, die als Schaustück zur Verfügung steht, den Abstand "h" der Platten ab und überprüfe die Größenordnung der von Dir berechneten Geschwindigkeit v_z der Elektronen

$$v_z = \frac{U_p}{h \cdot B^*}; \quad v_z = \sqrt{\frac{2eU_2}{m}}$$

wobei: U_2 ...Beschleunigungsspannung in V
 U_p ...Plattenspannung in V
 B^* siehe Versuch 3
 e/m ... $1,759 \cdot 10^{11}$ C/kg
 h ...gem. Plattenabstand in m

Wegen unserem Aufbau stimmt die vorher (auf Theorie basierende) Ableitung nicht ganz. Da die Wirkungssphäre von E und B nicht gleich groß ist, müßte man eigentlich die Ablenkungen D für die beiden wirkenden Kräfte gleichsetzen. Man kommt dann zwar auf die gleiche Proportionalität wie in der Theorie, aber mit einem komplizierteren geometrischen Faktor.

3.5. SPIRALBEWEGUNG VON ELEKTRONEN

Bewegt sich eine Ladung parallel zu einem Magnetfeld, tritt keine Lorentzkraft auf - was aber passiert mit einem Elektronenstrahl der FAST parallel zum Magnetfeld ist?

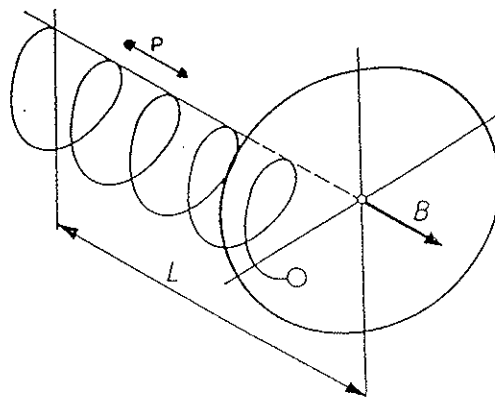
Die Kraft hängt dann nur vom transversalen Geschwindigkeitsanteil ab. Bei der sich ergebenden Bewegung handelt es sich um eine Spiralbewegung:

$$\varphi = \omega t, \quad z = v_z t;$$

Die Ganghöhe p ist so definiert, daß gerade eine

$$\text{Drehung um } 2\pi \text{ erfolgt} \Rightarrow p = 2\pi \frac{v_z}{\omega} = \frac{L}{n}$$

$$\text{Zyklotronfrequenz: } \omega = \frac{eB}{m}$$

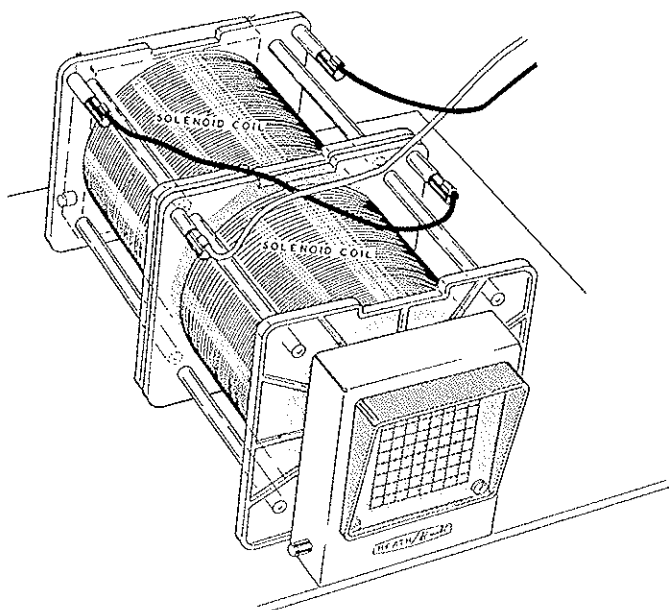


3.5.1. Versuchsbeschreibung

Bei der am Versuchsplatz befindlichen Oszilloskop-Röhre, wird der Strahl nicht so exakt fokussiert, sodaß ein paar divergente Anteile der Bewegungsrichtung vorhanden bleiben. So sind kleine Geschwindigkeitsanteile in y -Richtung vorhanden, die durch ein Magnetfeld in Richtung der Hauptbewegungsrichtung, beeinflusst werden kann. So entstehen je nach Magnetfeldgröße und Beschleunigungsspannungen periodisch großflächige und punktförmige Leuchterscheinungen am Schirm.

Die Idee die dahinter steht: geht sich eine volle Umdrehung (oder ein Vielfaches davon) innerhalb der Länge der Röhre aus, kann man den Strahl fokussieren; so kann man am leichtesten Punkte gleicher Phase bestimmen, und dadurch auch die Ganghöhe.

3.5.2. Versuchsaufbau



ACHTUNG:

Zuerst die Spulen von der Röhre wegstellen, dann den Plastikschutz wegklappen. Beim Wegziehen des Schirmes (nach vorne) und dann vor allem beim "Einfädeln" der Röhre in die Spulen ist wegen der Implosionsgefahr größte Vorsicht geboten.

3.5.3. Versuchsdurchführung

Bestimme die spezifische Elementarladung durch Variieren von n , U_2 und B (bzw. I) aus der Formel

$$\frac{e}{m} = \left(\frac{2\pi n}{BL} \right)^2 U_2$$

wobei: n ..Anzahl der Fokussierungen
 L ...Länge Anode-Schirm (0,135 m)
 U_2 ...Beschleunigungsspannung in V
 $B = \mu_0 \frac{I_s N}{L}$,

ACHTUNG!: L ... hier die Länge **BEIDER** Spulen in m
 N ...Windungen beider Spulen = 6800
 I_s ...Spulenstrom in A

PROTOKOLLANLEITUNG

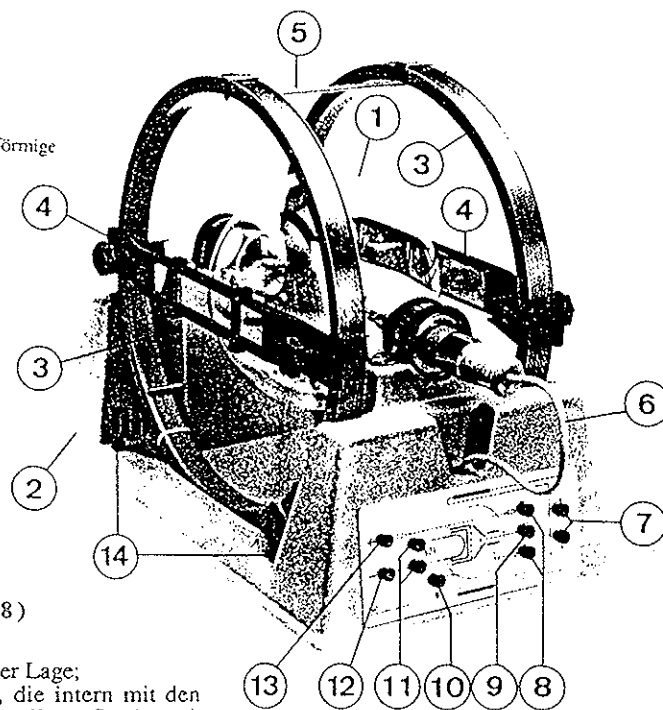
- ✧ Notiere für jede (mind. 2) Beschleunigungsspannung 2 Fokussierungen ; verwende zur Berechnung der spezifischen Elementarladung die Differenz der beiden gemessenen Spulenströme und von n (in unserem Fall $n = 1$)
- ✧ Vergleiche Dein Ergebnis mit denen von Versuch 3.3. und diskutiere die möglicherweise auftretenden Differenzen.

Der folgende Versuch kann bei Zeitmangel entfallen

4. FADENSTRAHLROHR - Teamworkversuch

benötigte Zeit max. 1/2 Stunde

Gasfüllung: Wasserstoff; $1,33 \cdot 10^{-2}$ mbar
 Elektronenstrahlssystem: indirekt geheizte Oxid-Kathode, Wehnelt-Zylinder, kegelförmige Anode mit Abschirm-Halbzyylinder
 Heizspannung und -strom: $6,3 \text{ V} \sim$, ca. 1 A
 Beschleunigungsspannung U_0 : bis 300 V -
 Wehneltspannung: max. 25 V -
 Plattenpaar zur elektronischen Strahlablenkung (unmittelbar hinter Anode angeordnet)
 Plattenspannung U_p : bis 400 V -



Helmholtzspulen mit Ständer und Meßvorrichtung (LH 555 58)

1 Ständer zur Halterung des Fadenstrahlrohres und der Spulen in definierter Lage;
 Anschluß der Betriebsspannungen an Sicherheitsbuchsen ⑦ bis ③, die intern mit den Buchsen ④ (Spulenanschlüsse) bzw. über fest installiertes Kabel ⑥ mit 6-poligem Stecker mit der Röhre verbunden sind.

Buchsen	⑦	mit Helmholtzspulen	
Buchsen	⑧	mit Ablenkplatten	
Buchse	⑨	mit Anode	
Buchse	⑩	mit Wehnelt-Zylinder	verbunden
Buchsen	⑪	mit Heizung	
Buchse	⑫	mit Katode	
Buchse	⑬	mit Anode	

Meßvorrichtung

Paar Helmholtzspulen

Windungszahl: N: 130 je Spule
 Spulenradius: R: 150 mm
 Spulenabstand: D: 150 mm
 maximal zulässiger Spulenstrom: I_s : 2 A -

bestehend aus Steg mit 2 Schiebern und Steg mit Spiegel und 2 Schiebern, zur Bestimmung des Durchmessers bei kreisförmig verlaufendem Elektronenstrahl.

Distanzhalter

2 Schellen, 4 Schrauben, 4 Unterlegscheiben

Spannungsversorgung für Elektronenstrahlssystem:
 stabilisiertes Netzgerät LH-52235: 0 bis 300V-, 0 bis 25V-, 6V ~ /1A.

Spannungsversorgung für Ablenkplattenpaar:
 Heathkit Regulated HV Power Supply Model IP-17: 0 bis 400V -

Stromversorgung Helmholtzspulen (inkl. Amperemeter):
 Manger Electronic LNG 191/3: 0 bis 4A - (max. 2A verwenden!!)

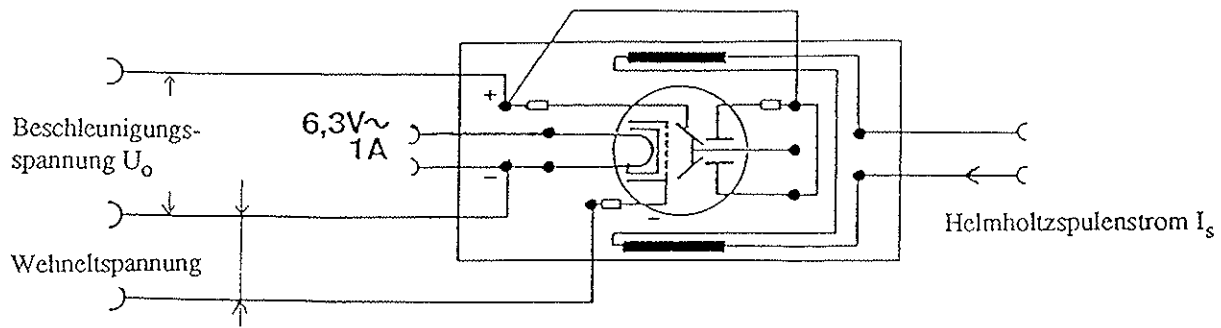


Abb. 3

⚠ **Achtung:** Versorgungsgeräte erst einschalten, wenn die Schaltung fertiggestellt und vom Praktikumsbetreuer überprüft wurde!

- * Heizspannung nicht über 6,3 V!
- * Helmholtzspulenstrom nicht über 2 A!
- * Versuche im verdunkelten Raum durchführen!
- * Bei allen Versuchen ohne elektrische Strahlableitung Ablenkplatten auf Anodenpotential legen!

Zuerst wird die Heizspannung 6,3 V~ eingeschaltet. Nachdem die Kathode glüht (ca. 1 min) schaltet man die Beschleunigungsspannung U_0 (= Spannung zwischen Kathode und Anode) ein (etwa 150 bis 300 V). Der Wehneltzylinder liegt auf Kathodenpotential bzw. einige Volt (0-25V) negativ dazu. Die Ablenkplatten werden auf Anodenpotential gelegt.

Hat sich der Elektronenstrahl ausgebildet, wird die Wehneltspannung so optimiert, daß ein enges, scharf begrenztes Strahlenbündel entsteht.

Stromversorgungsgerät für die Helmholtzspulen einschalten und Spulenstrom (Achtung: nicht über 2A !) so wählen, daß der Elektronenstrahl auf eine geschlossene Kreisbahn abgelenkt wird.

(typische Einstellwerte: $U_0 \approx 200$ V, $U_{\text{Wehnelt}} \approx 5$ V, $I_S \approx 1,5$ A).

Verdrehen Sie nun das Fadenstrahlrohr im (nahezu) homogenen Feld der Helmholtzspulen um seine Längsachse und beobachten Sie die Ausbildung einer spiralförmigen Bahn!

Untersuchen Sie (qualitativ) die Abhängigkeit des Bahndurchmessers von Beschleunigungsspannung U_0 und Spulenstrom I_S !

5. Anhang

5.1. BESCHREIBUNG DER OSZILLOSKOPRÖHRE

Vokabelliste (teilweise nicht wörtliche, sondern inhaltmäßige Übersetzung)

grid	Gitter	incident	auf/einfallend
control grid	Wehneltzylinder	impurity	Verunreinigung
aperture	Blende	baffles	Ablenkplatten
bias voltage	Gitter/Vorspannung	excite	anregen

A cathode-ray tube contains (1) an electron gun, which emits, accelerates, and focuses the electrons; (2) a deflection system; and (3) an indicator of the electron deflection.

A sketch of the electron gun and deflection system for the 3BP1, which is a common tetrode cathode-ray tube, is shown in Fig. 3. The electrons are emitted from an indirectly heated cathode, which is in the form of a cylinder closed off at one end by a small plate. This plate is coated with barium and strontium oxides, which emit a high-density electron stream. The cathode is brought to operating temperature by a twisted heater element, which is contained within the cathode cylinder and separated from it by a heat-conducting ceramic sleeve. Surrounding the cathode is a cylinder with a small aperture at its center. This outer cylinder is called the control grid. The grid aperture is smaller than the emitting surface, and the spacing between the aperture and the cathode emitting surface is quite small. Facing the control grid is the second grid. Those electrons which pass through the grid aperture are accelerated by the electric field resulting from the high potential of the second grid with respect to cathode. Facing the second grid is the first anode cylinder, often called the focusing anode. This cylinder, which is coaxial with the second grid, contains several baffles, each with an aperture at its center. Beyond the first anode is the second, or accelerating, anode. This structure is coaxial with the first anode and has a pair of baffles to further restrict the electron beam. An extension of the second anode exists in the form of a conducting coating on the inside of the glass envelope, extending from the limit of the anode cylinder almost to the screen of the tube. Connection to this coating is accomplished by an arrangement of electrically conducting spring contacts, which are mounted on the gun.

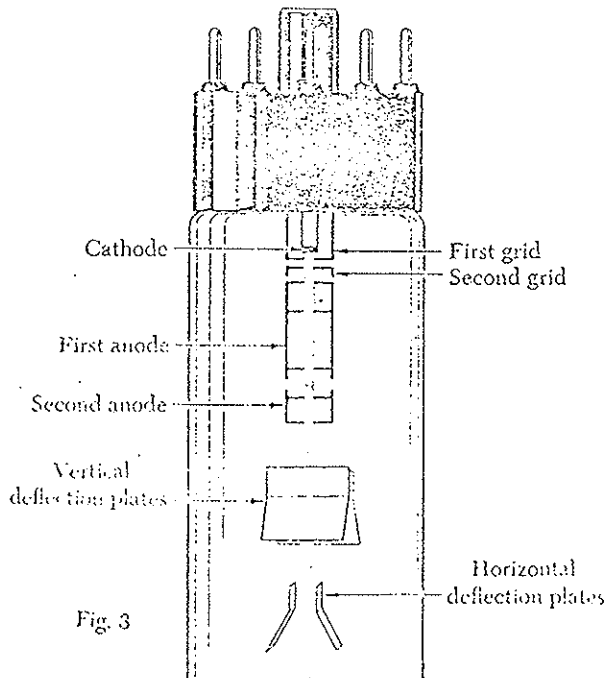


Fig. 3

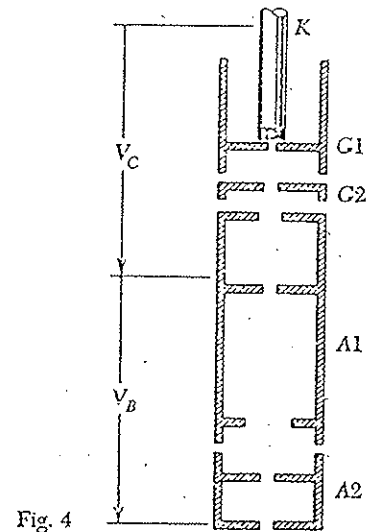


Fig. 4

A schematic representation of the cathode-ray tube is shown in Fig. 4. The second, or accelerating, anode $A2$ is ordinarily fixed to a positive potential of several thousand volts with respect to the cathode. For safety and convenience we shall use an ordinary laboratory power supply, which will limit the potential of $A2$ to $V_B + V_C$, about 500 volts. The first, or focusing, anode $A1$ is operated at a potential V_C approximately one-quarter of $V_B + V_C$, the potential of $A2$. The second grid $C2$ is connected internally to $A2$. Varying the potentials V_C and V_B from the power supply will allow the beam to be focused and the electron energy to be varied. The control grid is always negative with respect to the cathode potential. The density of the electron beam and, thus, the intensity of the pattern on the screen may be varied by varying this voltage difference, which is called the bias voltage.

Ordinarily the control grid is operated at a potential about 20 volts negative with respect to cathode. Because of the reduced voltages used in this experiment, a grid bias of $4\frac{1}{2}$ volts should be adequate to prevent the local burning of the phosphor which can result from excessive screen heating by the intense electron beam. This bias should still provide sufficient intensity to make the spot clearly visible. Still, it may be desirable to reduce the bias at the lowest second anode potentials.

The action of the focusing anode $A1$ in projecting the image of the grid aperture onto the screen is discussed in the appendix to Experiment A-1, where an additional optional experiment is proposed. We suggest that the principal experiment involving the deflection of an electron beam by a uniform electrostatic field be performed first. If there is sufficient time, you may be able to investigate some of the remarkable properties of electrostatic lenses, whose behavior is closely analogous to that of optical lenses.

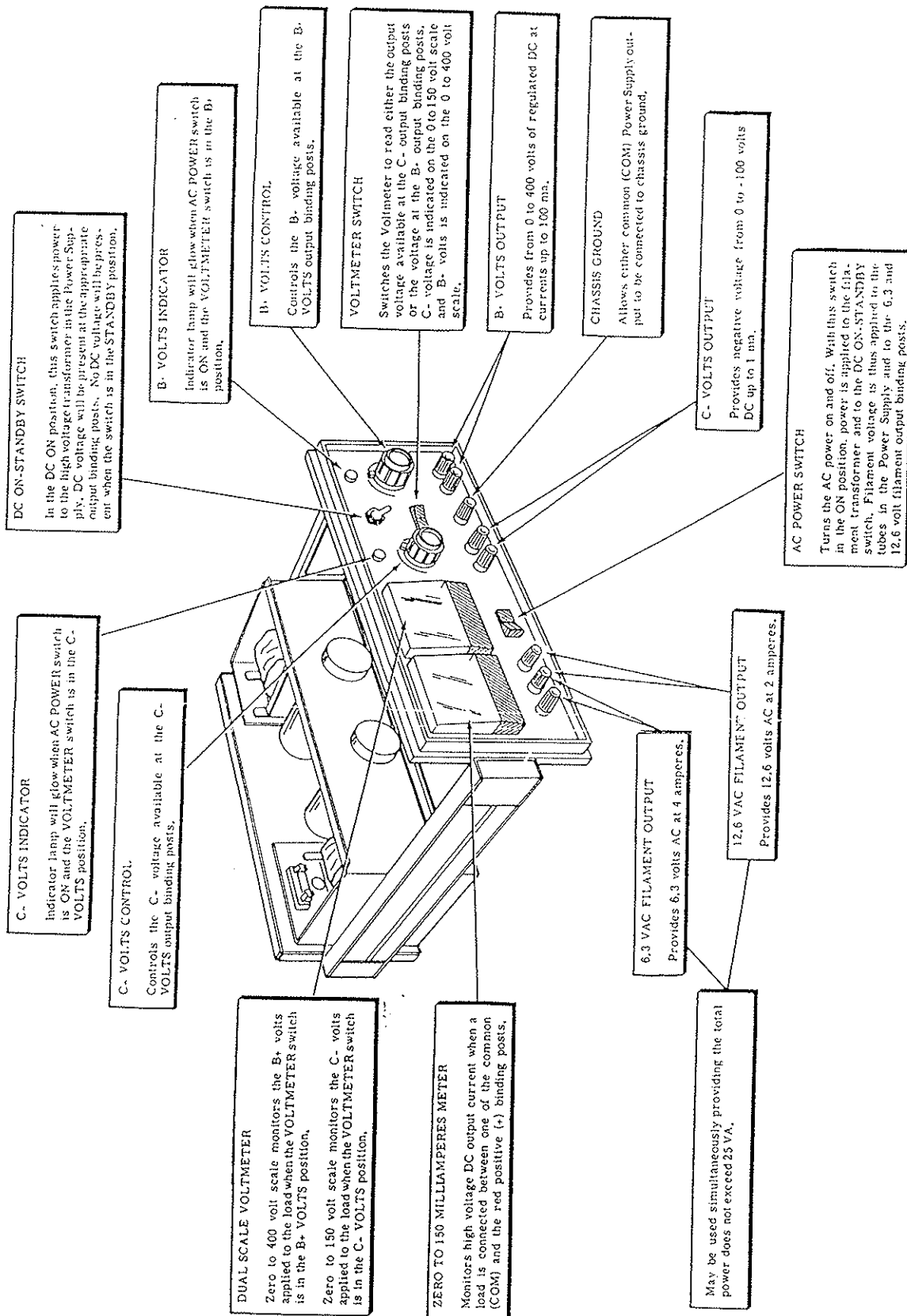
The glass envelope of the electrostatic cathode-ray tube is conical in shape, with a tubular neck in which the electron gun is mounted. The fluorescent screen is coated on the inside face of the cone. Because of the

high voltage used, a high vacuum is required for the tube. This high vacuum, coupled with the large surface area of the screen face makes the tube dangerous to handle. Any weakening of the envelope which might be caused by a mechanical shock or a scratch on the glass may cause a severe implosion, resulting in a widespread scattering of glass and screen material. The tube used in the laboratory has a protective cover and should be handled only with the cover in place. The powdered graphite coating (aquadag) that is applied to the inner surface of the tube serves several purposes. In addition to acting as an extension of the second anode, it collects the secondary electrons that are knocked off the screen (see discussion below) and also serves as an electrical and optical shield. The electrical shielding reduces the influence of stray internal electrostatic fields, preventing undesired deflection or defocusing. Because the coating is black and opaque, it prevents stray light from entering the sides of the envelope and shining on the image produced on the fluorescent screen. This prevents a reduction in contrast.

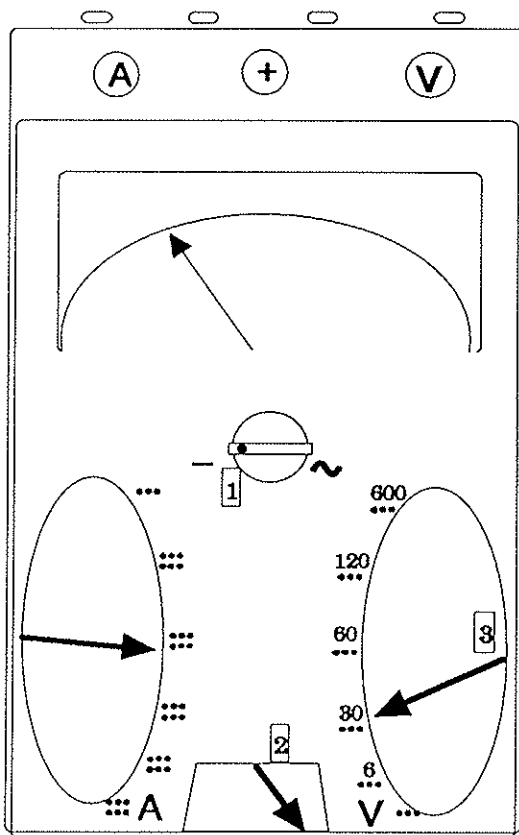
The screen of the cathode-ray tube is internally coated with a phosphor, which glows visibly when struck by an electron beam. The incident electron beam excites some of the impurity or activator centers in the phosphor to excitation levels above their normal electronic states. The excited electrons return to their lower energy states, giving up the energy difference in the form of radiation. By varying selections of the basic phosphor and the kind of activator, one may obtain a wide range in persistence and color.

When the electron beam strikes the screen material, other electrons are completely ejected from the phosphor. These free electrons are called secondary electrons, and the process is referred to as secondary emission. The secondary electrons are collected by the aquadag conducting graphite coating and flow into the positive terminal of the power supply, completing the electrical circuit. For second-anode voltages below several hundred volts, the secondary electron current may be lower than the primary current. A negative charge may then build up on the screen of the tube, deflecting the incident electron beam directly to the side coating. Increasing the second-anode voltage may make it possible to drive electrons to the screen and, ultimately, to eject a sufficient number of electrons to neutralize the screen. By reducing and subsequently raising the second-anode potential, you may be able to observe this process.

5.2. HEATHKIT



5.3. ANALOGES MULTIMETER

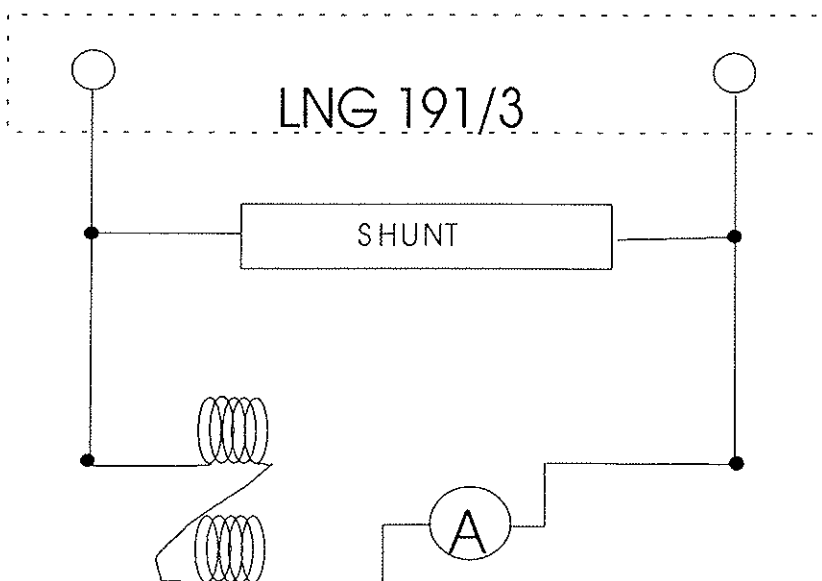


Erklärung für die Verwendung des Multimeters bei Gleichstromspannungen zwischen 2 und 600 Volt

am Beispiel der Wehneltzylinderspannung von 4,5V

1. Buchsen für V(-) und V(+) verwenden
2. Regler Nr 1 auf DC stellen
3. Schalter Nr 2 auf V stellen
4. Meßbereich mit Regler Nr 3 wählen
 zB: 6V: 60 Einheiten auf Skala = 6V
 für 4,5 V auf 45 E
 12V: für 4,5 V auf 22.5 E

5.4. SCHALTBILD FÜR VERSUCH3.3.



Einbau von Shunt und Amperemeter

Gerthsen · Kneser · Vogel

PHYSIK

Ein Lehrbuch
zum Gebrauch neben Vorlesungen

Zwölfte, völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage von

H. Vogel

Mit 711 Abbildungen

Berichtigter Neudruck



Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York 1974

8.2. Bewegung freier Ladungsträger

8.2.1. Elektronen im homogenen elektrischen Feld

Zwischen zwei parallelen Platten im Vakuum, z. B. einer ebenen Glühkathode (Wehnelt-Kathode) und einer ebenen Anode (Abb. 392) im Abstand d bestehe die Spannung U . Wenn zwischen den Elektroden nur so wenige Ladungsträger sind, daß ihre Ladung das Feld nicht wesentlich verzerrt, herrscht ein homogenes elek-

Ladungen beschreiben im homogenen E -Wurffeld

437

trisches Feld $E = \frac{U}{d}$. An einer Ladung e zwischen den Platten greift daher die Kraft eE an und erzeugt, da keinerlei sonstiges Hindernis besteht, eine konstante Beschleunigung nach der Newtonschen Grundgleichung

$$m \cdot b = e \cdot E = e \cdot \frac{U}{d} \tag{8.5}$$

Die Ladung fällt also, wie ein Stein im Erdschwerkfeld, gleichmäßig beschleunigt auf die Anode zu. Ihre Flugzeit t_d von der Kathode zur Anode und die Geschwindigkeit v_d , mit der die Teilchen dort ankommen, ergeben sich aus den Fallgesetzen (1.4.1) (vorausgesetzt, daß die Ladungen an der Kathode mit $v = 0$ starten):

$$d = \frac{b}{2} \cdot t_d^2 = \frac{e \cdot U}{2 m d} \cdot t_d^2 \quad \text{also} \quad t_d = \sqrt{\frac{2 m d^2}{e U}}$$

$$v_d = b t_d = \sqrt{\frac{2 e}{m} U} \tag{8.6}$$

v_d folgt einfacher aus dem Energiesatz: $\frac{m}{2} v_d^2 = e \cdot U$. Die Geschwindigkeit hängt also nicht von der Länge des Fallweges, sondern nur von der durchfallenen Spannung ab. Aus der energetischen Überlegung entnimmt man, daß die Geschwindigkeit auch von der Verteilung der Feldstärke über den Flugweg unabhängig ist; die Gültigkeit von (8.6) ist also nicht auf homogene Felder beschränkt, wohl aber natürlich darauf, daß keine bremsende Materie zwischen den Platten ist.

Schießt man Elektronen in ein elektrisches Feld *senkrecht* zu dessen Richtung ein (Abb. 393), so beschreiben sie eine Parabelbahn, ebenso wie ein horizontal geworfener Stein im Schwerfeld der Erde. War ihre Anfangsgeschwindigkeit v_0 , so brauchen sie zum Durchqueren der Länge l die Zeit $t = \frac{l}{v_0}$. Senkrecht dazu, in Feldrichtung, haben sie nach dieser Zeit auf Grund ihrer Fallbewegung eine Geschwindigkeit

$$v_A = b \cdot t = \frac{e}{m} \cdot E \cdot \frac{l}{v_0} \tag{8.7}$$

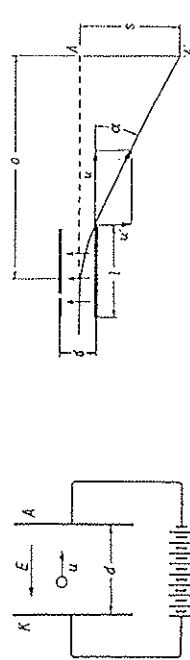


Abb. 392. Das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld
Abb. 393. Ablenkung von Elektronenstrahlen im homogenen elektrischen Querfeld

Die horizontale Geschwindigkeit ist unverändert $v_{||} = v_0$. Daher hat sich die Flugrichtung gedreht um den Winkel α , der sich ergibt aus

$$\tan \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{||}} = \frac{e}{m} \cdot E \cdot \frac{l}{v_0^2} \quad (8.8)$$

Ist bei l das Feld zu Ende, so ist α die Ablenkung des Strahles. Einen Schirm, der im Abstand $a \gg l$ hinter dem Ablenkkondensator aufgestellt ist (Abb. 393), treffen die Elektronen also nicht im Punkt A , sondern in einem Abstand s davon:

$$s = a \cdot \tan \alpha = \frac{e}{m} \cdot E \cdot \frac{l}{v_0^2} \cdot a, \quad (8.9)$$

oder, ausgedrückt durch die Spannung U_k , die am Ablenkkondensator liegt, und die Spannung U_e , mit der die Elektronen vor dem Einschuss in das Ablenkfeld beschleunigt wurden: $e \cdot U_e = \frac{m}{2} \cdot v_0^2$, $U_k = E \cdot d$, d. h.

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{d} \cdot a \cdot \frac{U_k}{U_e} \quad (8.10)$$

Die Ablenkung eines Teilchenstrahles, gemessen auf dem Schirm, hängt also nur von der Geometrie der Anordnung und den benutzten Spannungen ab. Die Eigenschaften der Teilchenspielen keine Rolle (außer dem Vorzeichen ihrer Ladung).

8.2.2. Elektronen in homogenen Magnetfeldern; Messung der spezifischen Ladung $\frac{e}{m}$

Wenn eine Ladung e mit der Geschwindigkeit v durch ein Magnetfeld B fliegt, erfährt sie eine Kraft

$$K = e v \times B, \quad (8.11)$$

die Lorentz-Kraft. Diese verschwindet nur dann, wenn v parallel zu B ist, steht sowohl auf der Feldrichtung (B) wie auf der Bewegungsrichtung (v) senkrecht und ist maxi-

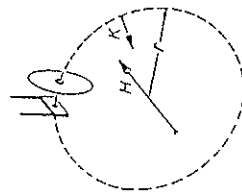


Abb. 394. Kreisbahn von Elektronen im homogenen Magnetfeld

mal, nämlich vom Betrag $e v B$, wenn v senkrecht zu B ist. Wir beschränken uns zunächst auf diesen Fall $v \perp B$ und untersuchen die Bewegung der Ladung, die dabei herauskommt.

Eine Kraft, die immer senkrecht auf der Bewegung des Teilchens steht, kann nach 1.5.1 keine Arbeit leisten, also die Energie und damit die Geschwindigkeit des Teilchens nicht steigern. Es handelt sich also um eine Bewegung mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag und einer Beschleunigung, die immer senkrecht zur Bahn erfolgt. Dies sind die Kennzeichen einer gleichförmigen Kreisbewegung (1.4.2). Die Lorentz-Kraft wirkt als Zentripetalkraft, der im Bezugssystem des Teilchens eine Zentrifugalkraft die Waage hält:

$$\frac{m v^2}{r} = e v B. \quad (8.12)$$

Das Teilchen läuft mit einer Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{e}{m} B \quad (8.13)$$

um (Larmor-Frequenz). Sie spielt eine große Rolle für die Deutung optischer Effekte wie Faraday-Effekt, Zeeman-Effekt usw. (vgl. 10.5.4, 12.7.10). Die Kreisbahn hat einen Radius

$$r = \frac{m v}{e B}. \quad (8.14)$$

Nimmt das Feld nur ein kleines Bogenstück dieses Kreises ein, d. h. ist seine räumliche Ausdehnung $l \ll r$, so erfolgt eine Ablenkung um den Winkel α

$$\alpha \approx \frac{l}{r} = \frac{l e B}{m v}. \quad (8.15)$$

Kennt man die kinetische Energie der Teilchen (sie ergibt sich aus der benutzten Beschleunigungsspannung U : $\frac{m}{2} v^2 = e U$), so folgt $v = \sqrt{\frac{2 e}{m} U}$, und aus (8.13) läßt sich $\frac{e}{m}$ ausdrücken:

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{r B} = \frac{1}{r B} \sqrt{\frac{2 e U}{m}} \quad \text{oder} \quad \frac{e}{m} = \frac{2 U}{r^2 B^2}. \quad (8.16)$$

Rechts stehen nur meßbare Größen, wenn man z. B. folgende Anordnung wählt: In einem auf ca. 10^{-3} Torr evakuierten Glaskolben, in dem ein Paar von „Helmholtz-Spulen“ (Abb. 394) ein weitgehend homogenes Magnetfeld erzeugt, sendet ein System aus Glühkathode und Anoden-Lochblende (besser Wehnelt-Zylinder) ein paralleles Bündel schneller Elektronen aus, die bei richtiger Wahl der Magnetfeldstärke eine saubere Kreisbahn ziehen. Diese ist als Leuchtspur infolge des Stoßionisations-Leuchtens des Restgases gut zu erkennen.

Für die Atomphysik wichtig ist auch der Fall, daß eine Ladung schon in einem anderen (z. B. elektrischen) Feld auf eine Kreisbahn gezwungen wird. Setzt man

ein solches System einem zusätzlichen Magnetfeld aus, das z. B. senkrecht auf der Bahnebene steht, so stellt die entsprechende Lorentz-Kraft je nach Umlaufsinn einen zusätzlichen Beitrag zur Zentrifetal- oder Zentrifugalkraft dar. Die Bahn wird also weiter bzw. enger, die Umlauffrequenz verringert bzw. vergrößert sich, und dies genau um den Betrag $\frac{e}{m}B$: Die Kreisfrequenz im Magnetfeld ist $\omega_B = \omega_0 \pm \frac{e}{m}B$, wenn sie ohne Magnetfeld ω_0 war.

Wenn das Magnetfeld nicht senkrecht auf der Umlaufebene steht, kann man so argumentieren: Die umlaufende Ladung stellt einen Kreisstrom dar, der nach 7.2.5 ein magnetisches Moment senkrecht zur Bahnebene, also schief zum Magnetfeld hat. Das Magnetfeld übt auf dieses magnetische Moment ein Drehmoment aus, unter dessen Einfluß die kreisende Ladung, wie jeder Kreis, eine Präzessionsbewegung ausführt (vgl. 2.4.2). Die Frequenz dieser Präzession ergibt sich wieder zu $\frac{e}{m}B$. Das Elektron kann also eigentlich machen was es will: Im Magnetfeld tritt immer eine kreisende Bewegung mit der Frequenz $\frac{e}{m}B$ (der Larmor-Frequenz) auf.

8.2.3. Elektronenstrahloszillograph und Fernschröhre

Die Ablenkung von Elektronenstrahlen in einem Querfeld wurde zuerst von Ferdinand Braun zur Messung von schnell veränderlichen Spannungen ausgenutzt. Die von ihm geschaffene „Braunsche Röhre“, auch Kathoden- oder Elektronenstrahloszillograph genannt, ist heute sehr verfeinert und ein unentbehrliches Meßgerät geworden. Ihre Wirkungsweise ist die folgende (Abb. 395):

Aus der Glühkathode K treten Elektronen und werden durch die Anodenspannung U_A (einige kV) zwischen K und der durchbohrten Anode A beschleunigt. Durch das Loch in A treten sie hindurch und werden bei passender Formgebung sogar noch enger gebündelt (fokussiert). Sie treten dann durch den Ablenkkondensator C und treffen auf den Leuchtschirm S. Die zu analysierende Spannung U wird

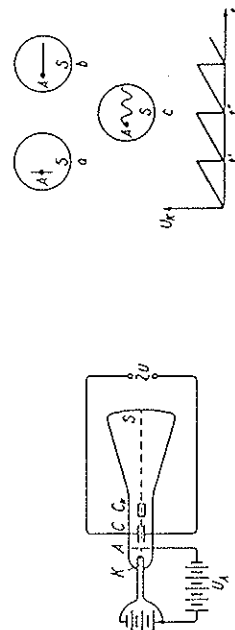


Abb. 395. Elektronenstrahloszillograph. siehe. Abb. 396a—c. Verwendung einer Kippspannung zur Aufzeichnung des zeitlichen Verlaufs einer periodischen Wechselfrequenz auf dem Schirm eines Oszillographen

an den Ablenkkondensator C gelegt. Ist diese Spannung eine periodische Wechselfspannung, so wird der Leuchtfleck zu einem vertikalen Strich auseinandergezogen (Abb. 396a). Will man den zeitlichen Verlauf beobachten, dann legt man an den hinter C angebrachten, um 90° gedrehten Kondensator C_k eine „Kippspannung“ U_k , deren zeitlicher Verlauf in Abb. 396 dargestellt wird. Sie allein bewirkt auf dem Schirm eine horizontale Ablenkung (Abb. 396b). Durch Überlagerung beider Ablenkungen entsteht dann das in Abb. 396c dargestellte Bild. Durch passende Wahl der Kippfrequenz erreicht man, daß die zu analysierende periodische Spannung immer die gleiche Phase besitzt, wenn die Kippspannung (zu den Zeiten t, t', \dots) zusammenbricht und der Strahl nach A „zurückspringt“. Dann überdecken sich alle Ablenkungsbilder auf dem Leuchtschirm, es ergibt sich ein stehendes Bild.

Das elektronenoptische System einer Fernschröhre funktioniert ganz ähnlich, nur daß die Helligkeitssteuerung (Steuerung der Anzahl von Elektronen im Strahl), die beim Oszillographen manuell erfolgt, hier automatisch den Lichtwerten des wiedergegebenen Bildes folgt. Das einfachste Mittel hierzu wäre die Heizspannung der Glühkathode, von der deren Temperatur und Elektronenemission sehr empfindlich abhängen (vgl. 8.1.1). Leider ist die Kathode thermisch zu träge, um die schnellen Bildwertschwankungen (die in ungefähr 10^{-7} s erfolgen müssen) wiederzugeben. Man benutzt daher echt elektronenoptische Mittel (Wehnelt-Zylinder), um einen variablen Teil der emittierten Elektronen abzufangen.

Beim Oszillographen wie in der Fernschröhre ist die Schirminnenseite mit einer lumineszierenden Substanz überzogen (Sulfide und Silikate von Zink und Cadmium, welche die Energie der aufschlagenden Elektronen in Licht geeigneter Farbe umsetzen; vgl. 12.2.3).

7.1.2.2.3. Elektronenkanonen

Kathodenform, Flucht oder nur schwach konvex oder konkav gekrümmte Emissionsflächen großer Ausdehnung (z. B. Bandkathoden) werden verwendet, wenn im Brennfleck des Strahlbündels hohe Stromdichte erzielt werden soll. Brennfleckdurchmesser und Gesamtstrom sind dann ebenfalls groß. Stark konvex gekrümmte Emissionsflächen, z. B. der Krümmung eines haarnadelartigen gebogenen Glühfadens, an welchen bei höheren Ansprüchen eine elektrolytisch angeätzte Drahtspitze angepunktet wird (Spitzenkathode, Krümmungsradius an der Spitze 2-3 µm) werden verwendet, wenn es bei geringem Gesamtstrom auf kleine Brennfleckgröße, also auf kleine Bestrahlungsapertur ankommt.

Triodensysteme: Die Strahlintensität wird durch Variation der negativen Vorspannung einer zwischen Kathode und Anode angebrachten Lochblende (Wohnelt-Elektrode) reguliert, deren Potentialvorhang unter gleichzeitiger Beeinflussung der Elektronenröhrumladung vor der Kathode einen mehr oder weniger großen Emissionsbereich der Kathode für das Strahlbündel insblendenartig freigibt (vgl. auch 7.1.6.4.2). Als Anode dient eine weitere Lochblende oder die leitende Wand des Rohrs (offene Anode). Ausführungsformen einiger vollständiger Elektronenstrahlröhren (Elektronenkanonen) zeigen Figuren 371 und 372; vgl. auch Röntgenröhren 7.1.2.3.1. Wird die Wohneltspannung an einem zwischen Hochspannungsquelle und Kathode liegenden Widerstand abgegriffen, so ist der Strahlstrom automatisch stabilisiert.

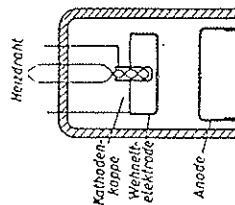


Fig. 371 Elektronenkanone eines Kathodenstrahlröhrensystems mit federlastiger Wehnelt-Oxydglasbohle (Nickelkapsel mit Oxydbohle an der Strahlfläche)

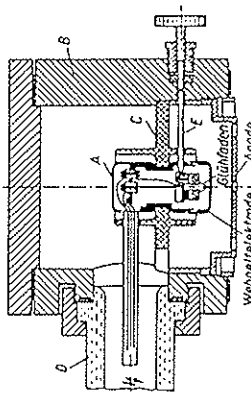


Fig. 372 Ausführung einer Elektronenkanone für Hochleistungen bis 50 kV nach H. H. R. Z. Phys. 110, 517 (1931) mit Hochvakuumrohr A: Kathodensystem mit Wehnelt-Elektrode B: Gehäuse aus Aluminium C: Hochspannungselektrode aus Triaxialglas D: Hochspannungsführung aus Triaxialglas E: Quarzrohr zum Isolieren der Innenkathodebohle F: Beschleuniger-Zylinderbohle G: Jostermöglichkeit H: Anode I: Anodebohle J: Anodebohle K: Anodebohle L: Anodebohle M: Anodebohle N: Anodebohle O: Anodebohle P: Anodebohle Q: Anodebohle R: Anodebohle S: Anodebohle T: Anodebohle U: Anodebohle V: Anodebohle W: Anodebohle X: Anodebohle Y: Anodebohle Z: Anodebohle

Der besondere Vorteil des Systems Fig. 373 liegt in der geringen Raumladung vor der Kathode. Dadurch werden bereits bei kleinen Strahlströmen hohe Lichtstrahlwerte erreicht. Derselbe Effekt wird in verstärktem Maße erzielt, wenn die Innenkathode durch eine Spitzenkathode ersetzt wird. Durch Erhöhung der negativen Wehneltspannung kann bei jedem System der Brennfleck in den Anodenraum verlegt werden (Fernfokussysteme, Wehneltspannungsstabilisierung erforderlich). Der Durchmesser des Brennflecks wird auch hier durch die Form der Wehnelt-Elektrode bestimmt. Er wird besonders klein, wenn statt der Blende ein Zylinder mit großem Durchmesser benutzt wird.

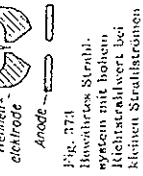


Fig. 373 Pierce-System mit Wehnelt-Elektrode und kleinem Strahlstrom

Triodensysteme haben, als Linse betrachtet, große Abbildungsfehler (vgl. 7.1.6.4.4). Damit der Brennfleck nicht zu einer Kauschik entartet, müssen die axialen Strahlen des Bündels durch eine Blende abgelenkt werden. In 50 cm Entfernung von der Kathode wurden Brennfleckdurchmesser von weniger als 100 µm bei Bestrahlungsaperturen im Brennfleck von 10-3 erreicht.

v. Borries, Optik 3, 361 u. 389 (1949); Ploko, Z. angew. Phys. 3, 441 (1951); 4, 1 (1952); Haino u. Einstein, Brit. J. appl. Phys. 3, 40 (1952); 9, 492 (1958); Doider u. Klempner, J. Electronica (1) 3, 439 (1957); Haino, Z. Naturforsch. 19 a, 836 (1964); Fernfokussysteme: Han. Bon. Naturwiss. 51, 379 (1964); Heizung einer bolzenförmig ausgebildeten Kathode durch Elektronenbombardement: Bas. Z. angew. Phys. 7, 337 (1955); Optik 12, 377 (1955); Bolzenkathode mit Fernfokus: Bas. u. Gaydon, ZAMP 10, 435 (1959); Spitzenkathode: Sakaki u. Möllenstedt, Optik 13, 193 (1956); Spreidel, Optik 23, 125 (1966); Zusammenfassend: Haino u. Linder, in Focusing of Charged Particles, Hrg. v. Suptor, New York u. London 1967 Bd. 1. In Röntgenröhren und Elektronenvervielfachern wird oft an Stelle der Fokussierung in einem Punkt solche in einem Strich benötigt. Bei nicht zu hohen Anforderungen läßt sich dies nach Thorp, J. Sci. Instr. 26, 201 (1949); Brk. J. appl. Phys. 1, 144 (1950), durch eine schiffziförmige, wie ein Zylinderlinse wirkende Wehnelt-Elektrode erreichen, zwischen deren Backen ein gestreckter Kathodenheizfaden liegt. Durch Voranordnung der negativen Vorspannung der Blende sowie durch vor- oder rückwärtige Verschiebung des Glühfadens kann im gewünschten Abstand ein eindimensionale Strahlbildung erzielt werden. Strahler mit Streiffokus: Gaedcke, Z. techn. Phys. 19, 204 (1938); Arndt, Z. Sci. Instr. 25, 414 (1948); Vanthier, J. Phys. Radium (9) 13, 107 (1952); Hosomann, Z. angew. Phys. 7, 532 (1955); Hollwig-Zwissler u. Mikarb., Optik 19, 371 (1962); Theorie: O'Hondorf, Elektronik des Einzelstroms, Techn. Elektrodynamik Bd. 2/1, Kap. 1, Abschn. 6, Wien 1955.

Pierce-Systeme: Zur Erzeugung von Strahlbündeln mit einer „Pervance“ (d. i. Strom/Beschleunigungsspannung^{3/2}) größer als 10⁻⁷ A/V^{3/2} muß man in die Berechnung der Strahlführung die Raumladung des Elektronenstrahls selbst einbeziehen. Eine volle Berücksichtigung der Raumladungswirkung wird in den sog. Pierce-Systemen durch eine Krümmung der Elektroden versucht, welche die raumladungsbedingte Verbiegung der Potentialflächen gerade kompensiert, vgl. Fig. 374. Es gibt Pierce-Systeme sowohl für die Herstellung von parallelen wie von punktförmig fokussierten Strahlbündeln.

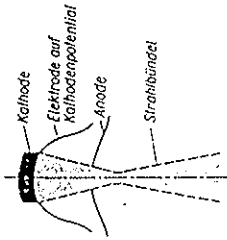


Fig. 374 Pierce-System nach Holm, Spangenberg und Field, Processing of charged Particles, Hrg. v. Suptor, Bd. 2, New York-London 1967, Electr. Commun. 24, 101 (1947)

Pierce, J. appl. Phys. 11, 548 (1940); Samuel, Proc. IRE 33, 233 (1945); Field, Rev. Mod. Phys. 18, 333 (1946); Danielson u. Mitarb., Bell Syst. Techn. J. 35, 375 (1956); Brewer, J. appl. Phys. 28, 7 (1957); Ambross, J. Electronica (1) 13, 545 (1962); auch Lottso-Kloot, Hochvakuum-Elektronenröhren Bd. 1, Kap. 13, Frankfurt 1955; Brewer, in: Processing of charged Particles, Hrg. v. Suptor, Bd. 2, New York-London 1967.

1.2 Meßfehler, Meßunsicherheit und Fehlergrenzen 29

Konsistenzprüfungen sollte man wo immer möglich ausführen, z. B. bei der Verwendung von Gewichtssätzen, Widerstandsnormalen etc. Man kontrolliere also bei Wägungen, ob die Verwendung von Kombinationen verschiedener Einzelmassen zur gleichen Gesamtmasse bzw. bei Widerstandsmessungen die Zusammensetzung verschiedener Einzelwiderstände zum gleichen „Normalwiderstand“ jeweils zum gleichen Meßergebnis führt.

Systematische Fehler können aber auch durch das angewendete Meßverfahren oder die Nichtberücksichtigung von Nebenständen hervorgerufen werden. So wird z. B. bei der Messung des Durchmessers eines Gummischlauchs mittels einer Schiebellehre der Schlauch beim Anlegen der Schnäbel deformiert; die Meßergebnisse werden dadurch kleiner, als es dem wahren Durchmesser entspricht. Bei der Messung des Widerstands einer Spule aus Kupferdraht durch Strom- und Spannungsmessung kann unter Umständen eine zeitliche Widerstandszunahme (infolge Joulescher Erwärmung und wegen des Temperaturkoeffizienten) auftreten. Die Nichtberücksichtigung dieser Nebenstände ruft einen systematischen Fehler (zu großes Meßergebnis bei längerer Dauer des Stromflusses) hervor.

Die Beurteilung systematischer Fehler – die bei oberflächlicher Untersuchung un bemerkt bleiben und das Meßergebnis in einer eindeutigen Richtung verfälschen – erfordert eine kritische Analyse und sorgfältiges Durchdenken des Meßverfahrens. Grundsätzlich können in ein Meßergebnis viele Faktoren eingehen. Die (positive) Kritik einer Messung zielt darauf ab, alle auf das Ergebnis der Messung wirkenden Einflüsse klein zu halten oder aber zu korrigieren. Methoden dazu sind die richtige Auswahl des anzuwendenden Meßverfahrens aus allen möglichen anwendbaren Verfahren und die umfassende Berücksichtigung aller Nebenstände; letzteres erfordert häufig zusätzliche Messungen oder aber „stabilisierende“ Maßnahmen, z. B. Thermostaten. Darüber hinausgehende Vorschläge für die Beurteilung systematischer Fehler können nicht allgemein gemacht werden; bei den zu besprechenden Aufgaben finden sich jedoch Hinweise (wenn auch nicht wörtlich) auf mögliche systematische Fehler und ihre Unterdrückung. Im Praktikum werden systematische Fehler häufig erst nachträglich erkannt, wenn die Meßergebnisse mit Tabellenwerten verglichen werden und dabei Abweichungen in bestimmter Richtung auftreten. Sorgfältige Messungen zeichnen sich dadurch aus, daß die systematischen Fehler durch vor der Messung angestellte Überlegungen in Betracht gezogen worden sind und bei der eigentlichen Messung durch geeignete Maßnahmen kleingehalten, durch Zusatzmessungen aufgedeckt und soweit möglich korrigiert werden. In diesem Zusammenhang wird der Begriff der Korrektion (Berichtigung) benutzt: Die Korrektion (Berichtigung) hat den gleichen absoluten Zahlenwert wie der Fehler, aber das entgegengesetzte Vorzeichen.

1.2.3 Zufällige oder statistische Fehler

Auch bei völliger Ausschaltung systematischer Fehler wird die mehrmalige Messung einer Größe niemals stets genau übereinstimmende Ergebnisse liefern. Mißt man z. B. die Länge eines Zimmers durch sukzessives Anlegen eines Bandmaßstabs von 2 m

1.2 Meßfehler, Meßunsicherheit und Fehlergrenzen *)¹⁾

1.2.1 Vorbemerkung

Nach Abschn. 1.1.1 bedeutet die Messung einer physikalischen Größe den Vergleich mit einer Einheit derselben Größe. Es liegt in der Natur dieses Vergleichens, daß dabei Fehler auftreten, auf die im folgenden näher eingegangen werden muß. Zu jeder sinnvollen Messung einer physikalischen Größe gehört dementsprechend eine Angabe über den Meßfehler der Größe (mindestens über dessen Größenordnung). Bei den Meßfehler hat man zwischen systematischen Fehlern und zufälligen Fehlern zu unterscheiden.

1.2.2 Systematische Fehler

Systematische Fehler liegen z. B. vor, wenn die bei den Messungen verwendeten Meßgeräte falsch geeicht²⁾ sind, wenn also beispielsweise das zu einer Längenmessung verwendete „Metermaß“ tatsächlich etwa 999 mm oder 1002 mm lang ist oder wenn seine Skalenteilung ungleichmäßig ist. Absolute Eichfehler²⁾ sind nur schwer zu erkennen; sie erfordern eine besondere Kontrolle der Meßgeräte. Die ungleichmäßige Skalenteilung eines Metermaßstabs bemerkt man jedoch daran, daß man zu verschiedenen Meßergebnissen kommt, je nachdem, welches Teilstück des Maßstabs man mit dem Meßobjekt vergleicht. (Man gewöhne sich daran, daß man zum Vergleich nicht notwendig vom Nullpunkt eines Meßgeräts – hier also des Metermaßstabs – ausgehen muß, daß dies vielmehr nur aus Bequemlichkeit geschieht und sich in systematischen Fehlern auswirken kann.) Das obengenannte Vorgehen (Vergleich des Meßobjekts mit verschiedenen Teilen des Maßstabs) ist eine Prüfung der „inneren Konsistenz“ des Meßgeräts. Solche

*) Bearbeitet von Wolfgang Zimmermann.

¹⁾ Vgl. hierzu auch: Kohlrusch: Praktische Physik I. 22. Aufl. Stuttgart 1968 und DIN 1319, Blatt 3.

²⁾ Der Begriff „Eichung“ und das Wort „eichen“ sind zwar im normalen Sprachgebrauch für jeden Vergleich mit einem Normal verbreitet, juristisch jedoch nur für diese Tätigkeit durch amtliche Stellen (Physikalisch-Technische Bundesanstalt = PTB, Eichämter) reserviert. Im Laboratorium spricht man richtiger von „Kalibrieren“.

32 1 Einleitung

Häufigkeitsverteilung entsprechende Abszissenwert - der „wahrscheinlichste Wert“ - ist als wahrer Wert der Meßgröße anzusehen.

Fig. 1.1 zeigt, daß zur Kennzeichnung eines Meßergebnisses zwei Angaben notwendig sind:

1) Ein Wert, der dem wahren Wert der Meßgröße möglichst nahe kommt. Für diesen Wert liefert die mathematische Statistik¹⁾ den arithmetischen Mittelwert der endlichen Stichprobe

$$\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l}) = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = 0 \quad (1.23) \quad (1.23a)$$

Gl. (1.23a) ist eine für Kontrollen wichtige Eigenschaft des arithmetischen Mittelwerts (vgl. Tab. 1.4).

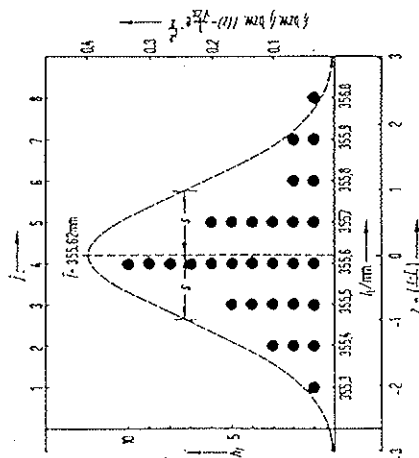


Fig. 1.1 Häufigkeitsverteilung einer Längenmessung
Die $n (= 30)$ Meßergebnisse (Stichprobenwerte) sind mit ihren absoluten bzw. relativen Häufigkeiten [linke Ordinate h_i bzw. rechte Ordinate f_i über den vorkommenden Werten l_i (untere Abszisse) bzw. f (obere Abszisse)] aufgetragen. Gestrichelt ist (vgl. dazu Abschn. 1.2.7) die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2s^2}$$

(Gaußsche Glockenkurve) eingezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Wertes zwischen l und $l+dl$ ist $f(l)dl = f(x)dx$, gemäß Gl. (1.28) die Wahrscheinlichkeitsdichte also $f(l) = f(x)/s$.

Auf Grund eines χ^2 -Tests führen die Stichprobenwerte des Beispiels mit einer Signifikanz $< 5\%$ zu der Normalverteilung mit den Parametern $\bar{l} = 355,62$ mm und $s = 0,16$ mm

¹⁾ Vgl. dazu Kreyzig, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendungen. 3. Aufl. Göttingen 1968; Krickeberg, K.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Stuttgart 1963; Behnke, H. und Tietz, H.: Mathematik II. Frankfurt 1966 (Fischer-Lexikon Bd. 29/2).

1.2 Meßfehler, Meßunsicherheit und Fehlergrenzen 33

2) Ein Maß für die Abweichung der Einzelwerte vom wahren Wert, für die Streuung der Meßwerte. Als solches kann „eine“ Breite der Glockenkurve dienen, wofür die mathematische Statistik die Standardabweichung (früher mittlerer quadratischer Fehler der Einzelmessung genannt)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2} \quad (n > 1) \quad (1.24)$$

gibt, deren Quadrat s^2 auch als Varianz bezeichnet wird. s bedeutet, daß für großes n die Wahrscheinlichkeit P , einen Einzelwert l zu messen, der innerhalb des Intervalls $\bar{l} \pm s$ liegt, $P = 68,3\%$ ist.

Von größerem Interesse als die Standardabweichung der Einzelmessung ist jedoch eine Größe, die angibt, wie „sicher“ der Mittelwert ist, eine Größe m also, die aussagt, daß der wahre Wert mit der statistischen Sicherheit (Wahrscheinlichkeit) P_α innerhalb des Vertrauensintervalls

$$\bar{l} \pm \alpha m = \bar{l} \pm v \quad (1.25a)$$

um den Mittelwert \bar{l} der Meßreihe (Stichprobe vom Umfang n) liegt. Hierfür liefert die mathematische Statistik den Vertrauensbereich des Mittelwerts $v = \alpha m$, mit

$$m = \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (1.25b)$$

(früher mittlerer quadratischer Fehler des Mittelwerts genannt) wobei

$$P_1 = 68,3\% \quad \text{für} \quad \bar{l} \pm m \quad (\alpha = 1)$$

$$P_3 = 99,7\% \quad \text{für} \quad \bar{l} \pm 3m \quad (\alpha = 3) \quad (1.25c)$$

Ein Meßergebnis der Größe x mit der statistischen Sicherheit $P_3 = 99,7\%$, d. h. den Vertrauensgrenzen $\bar{x} \pm 3m$ und $\bar{x} - 3m$, ist damit in der Form

$$\bar{x} \pm (3|m| + |\omega|) \quad (1.26a)$$

anzugeben. Es besitzt die Meßunsicherheit

$$u = 3|m| + |\omega| \quad (1.26b)$$

wobei $|\omega|$ der Schätzbetrag für nicht erfaßte und nicht erfäßbare systematische Fehler ist (Abschn. 1.2.4). Wie man aus Gl. (1.25b) und Gl. (1.26b) sieht, lohnt es nicht, durch Vergrößerung von n die Standardabweichung zu verkleinern, wenn nicht $|\omega| < |m|$. Mit anderen Worten: Eine ungeeignete Meßmethode liefert auch bei beliebig häufiger Wiederholung kein sicheres Ergebnis.

In vielen Fällen gibt man die relative Meßunsicherheit

$$u_r = \pm \frac{u}{\bar{x}} \quad (1.27a)$$

Länge, so hat man darauf zu achten, daß der Maßstab jedesmal parallel zur Wand ausgerichtet wird und bei jedem erneuten Anlegen der Nullpunkt wieder genau auf den Endpunkt des vorhergehenden Anlegens fällt. Auch bei größter Sorgfalt wird man dabei Fehler nicht ausschließen können. Beim letzten Anlegen schließlich wird man feststellen, daß das Ende der Meßstrecke nicht notwendig mit einem Teilstrich des Maßstabs zusammenfallen muß, so daß man Zwischenwerte zu schätzen hat. Alle Umstände zusammen bewirken, daß mehrmals nacheinander ausgeführte Messungen der Zimmerlänge Ergebnisse liefern, die rein zufällig einmal größer, ein anderes Mal kleiner ausfallen. Man spricht dann von einem zufälligen oder statistischen Fehler. Man beachte den in diesem absichtlich gewählten Beispiel noch verborgenen systematischen Fehler: Abweichungen von der Parallelität beim Anlegen bewirken, daß man die Länge eines Polygonzuges mißt, die stets größer oder höchstens gleich der geraden Verbindungslinie ist. Der sich aus den Einzelmessungen ergebende wahrscheinlichste Wert (Mittelwert) der Stichprobe ist daher größer als die interessierende Zimmerlänge. Die daraus resultierende Korrektur kann Gegenstand einer Abschätzung sein.

1.2.4 Meßunsicherheit

Hat man bei einer Messung (Ergebnis einer Meßreihe) die erfassbaren systematischen Fehler durch Anbringen einer Korrektur beseitigt, so bleibt immer noch die durch die statistischen Fehler und die nicht erfassbaren systematischen Fehler verursachte Meßunsicherheit u des Resultats. Der durch die statistischen Fehler verursachte Anteil von u kann durch eine Wahrscheinlichkeitsrechnung erfaßt und als Vertrauensintervall v angegeben werden, für den systematischen Restfehler ist man auf eine Schätzung w angewiesen. Damit ergibt sich die Meßunsicherheit eines Meßergebnisses als Summe aus dem Vertrauensbereich des gefundenen Mittelwertes aus n Einzelmessungen (Abschn. 1.2.5) und dem abgeschätzten Betrag für nicht erfassbare oder nicht erfaßte systematische Fehler zu $u = v + |w|$.

1.2.5 Fehlerkennzeichnung

Die Ergebnisse von $n = 30$ Längenmessungen l_i ($i = 1, \dots, 30$) sind als Beispiel in Tab. 1.4 zusammengestellt. Man nennt in der Statistik alle n Messungen zusammen eine Stichprobe (vom Umfang $n = 30$) und die einzelnen Meßergebnisse l_i die Stichprobenwerte. In Fig. 1.1 ist über den l_i (Abszisse) aufgetragen, wie oft jeder der Werte l_i in der Stichprobe vorkommt. Diese Anzahl h_i heißt absolute Häufigkeit der betreffenden Werte (linke Ordinate); nach Division durch den Stichprobenumfang $n (= 30)$ erhält man die relative Häufigkeit $h_i/n = f_i = f(l_i)$ der Stichprobenwerte (rechte Ordinate). Man erkennt, daß gewisse Meßergebnisse besonders häufig vorkommen, und alle Meßergebnisse um einen Mittelwert verteilt

1.2. Meßfehler, Meßunsicherheit und Fehlergrenzen 31

Tab. 1.4 Ergebnisse einer Längenmessung (Einzelwerte l_i bis l_{30})

i	l_i/mm	$\frac{\Delta l_i}{10^{-2} \text{ mm}}$	$\frac{(\Delta l_i)^2}{10^{-4} \text{ mm}^2}$	j	h_j	f_j	
1	355,6	- 2	4	1	355,3	1	0,033
2	355,8	+ 18	324	2	355,4	3	0,100
3	355,5	- 12	144	3	355,5	5	0,167
4	355,6	- 2	4	4	355,6	10	0,333
5	355,6	- 2	4	5	355,7	6	0,200
6	355,9	+ 28	784	6	355,8	2	0,067
7	355,5	- 12	144	7	355,9	2	0,067
8	355,4	- 22	484	8	356,0	1	0,033
9	355,6	- 2	4				
10	355,7	+ 8	64				
11	355,6	- 2	4				
12	355,9	+ 28	784				
13	356,0	+ 38	1444				
14	355,6	- 2	4				
15	355,3	- 32	1024				
16	355,7	+ 8	64				
17	355,8	+ 18	324				
18	355,6	- 2	4				
19	355,4	- 22	484				
20	355,5	- 12	144				
21	355,6	- 2	4				
22	355,7	+ 8	64				
23	355,7	+ 8	64				
24	355,5	- 12	144				
25	355,4	- 22	484				
26	355,5	- 12	144				
27	355,7	+ 8	64				
28	355,6	- 2	4				
29	355,6	- 2	4				
30	355,7	+ 8	64				
Σ	10668,6	0	7280				
	$\bar{l} = 355,62 \text{ mm}$						
	$\Sigma(\Delta l_i)^2 = 7280 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2$						
	$s^2 = 251,0 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2$						
	$s = 15,8 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$						
	$s_r = 4,4 \cdot 10^{-4}$						
	$v = 8,7 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$						
	$u_r = 2,4 \cdot 10^{-4}$						

Mittelwert	$\bar{l} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} l_i$
Varianz	$s^2 = \frac{1}{29} \sum_{i=1}^{30} (\Delta l_i)^2$
Standardabweichung	$s = \sqrt{s^2}$
Relative Standardabweichung	$s_r = s/\bar{l}$
Vertrauensbereich des Mittelwerts für	$P_r = 99,7\% (\alpha = \frac{2}{3})$
	$v = 3m = 3s/\sqrt{30}$
	$u_r = v/\bar{l}$

Ergebnis für $ w = 0$
$\bar{l} \pm u = \bar{l} \pm v = 355,62 \text{ mm} \pm 8,7 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$
$= (355,62 \pm 8,7 \cdot 10^{-2}) \text{ mm}$
$= 355,62 (1 \pm 2,4 \cdot 10^{-4}) \text{ mm}$
$= 355,62 (1 \pm 0,024\%) \text{ mm}$

sind. Die Funktion $f(l)$ nennt man Häufigkeitsfunktion oder Häufigkeitsverteilung der Stichprobe, sie ist im Falle einer sehr großen Stichprobe ($n \rightarrow \infty$) die in Fig. 1.1 dargestellte Glockenkurve (vgl. dazu Abschn. 1.2.7); der dem Maximum der

an. Häufig verwendet man auch die Größen relative Standardabweichung

$$s_r = s/\bar{x} \tag{1.27b}$$

und relativer Vertrauensbereich

$$v_r = v/\bar{x}. \tag{1.27c}$$

Für die Stichprobe der Tab. 1.4 sind die Ergebnisse der Berechnung gemäß Gl. (1.23) bis (1.27) in dieser Tabelle (rechts unten) zusammengefaßt. In den Spalten rechts oben sind auch noch die aufgetretenen Meßergebnisse nach ihrer Größe sortiert und mit ihrer Häufigkeit eingetragen; man erkennt, daß die ($n=$) 30 Messungen l_j nur zu ($k=$) 8 verschiedenen Ergebnissen l_j ($j=1, \dots, 8$) geführt haben. Dabei sind die einzelnen l jetzt unnummeriert. Unter Benutzung der absoluten bzw. relativen Häufigkeiten lassen sich dann die wichtigsten Gleichungen (1.23) und (1.24) auch schreiben:

$$\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k l_j h_j = \sum_{j=1}^k l_j f_j, \tag{1.23b}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^k (l_j - \bar{l})^2 h_j = \frac{n}{n-1} \sum_{j=1}^k (l_j - \bar{l})^2 f_j. \tag{1.24a}$$

1.2.6 Praktische Hinweise

Bei Verwendung eines Rechners benutzt man - neben Gl. (1.23) - Gl. (1.24) zweckmäßigerweise in der Form

$$s = \sqrt{\frac{\sum l_j^2 - l^2 \sum l_j}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum l_j^2 - n \bar{l}^2}{n-1}}. \tag{1.24a}$$

Einige moderne Taschenrechner bilden bei der Addition (Σl_j) die Summen Σl_j^2 und n automatisch mit und berechnen daraus auf Tastendruck unmittelbar die Werte \bar{l} , s und m bzw. v .

1.2.7 Normalverteilung

Im Grenzwert für großen Stichprobenumfang gehen die Häufigkeitsverteilungen unter bestimmten Umständen in mathematische Wahrscheinlichkeitsfunktionen über (z.B. Bernoulli- oder Binomialverteilung, Poissonverteilung, Gauß- oder Normalverteilung). Bei vielen physikalischen Messungen sind die Meßwerte „normalverteilt“. Die Wahrscheinlichkeits(dichte)verteilung (die im Grenzfall großen Stichprobenumfangs und kontinuierlicher (steiger) Verteilung der Abweichungen aus der Häufigkeitsverteilung hervorgeht) hat für die Normalverteilung die Form¹⁾

¹⁾ Um den Unterschied zwischen der die Stichprobe kennzeichnenden Größe s und dem hier in der Wahrscheinlichkeitsdichte verwendeten Parameter deutlicher zu machen, wird oft in Gl. (1.28) der Buchstabe s durch σ ersetzt.

1.2 Meßfehler, Meßunsicherheit und Fehlergrenzen 35

$$f(l) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(l-\bar{l})^2}{2s^2}\right). \tag{1.28}$$

Diese Funktion stellt eine Gaußsche Glockenkurve (Tab. A.1.6) dar (Fig. 1.1); das Maximum liegt bei $l = \bar{l}$, die Wendepunkte bei $l = \bar{l} \pm s$. Zwischen $\bar{l} - s$ und $\bar{l} + s$ liegen 68,3% (rund 2/3), zwischen $\bar{l} - 2s$ und $\bar{l} + 2s$ liegen 95,5%, und zwischen $\bar{l} - 3s$ und $\bar{l} + 3s$ liegen 99,7% aller Meßwerte. 50% aller Meßwerte liegen zwischen $\bar{l} - 0,674s$ und $\bar{l} + 0,674s$; die Wahrscheinlichkeit, innerhalb dieser Grenzen einen Wert zu finden, ist also gleich groß wie diejenige, daß ein Meßwert außerhalb dieser Grenzen liegt (beide Male = 1/2). Aus diesem Grund wird $t = 0,674s$ als wahrscheinlicher Fehler bezeichnet. Zwischen s und der Halbwertsbreite $b_{1/2}$ (volle Breite der Kurve in halber Höhe des Maximums) besteht der Zusammenhang

$$b_{1/2} = 2(2 \ln 2)^{1/2} s = 2,355 s. \tag{1.29}$$

Die Funktion Gl. (1.28) ist „auf 1 normiert“ (es ist $\int_{-\infty}^{+\infty} f(l) dl = 1$); kleines s bedeutet eine hohe, schlanke Kurve, großes s dagegen eine breite, niedrige Kurve. Man sieht daran geometrisch die Bedeutung der Standardabweichung s . Für die Überprüfung der Hypothese, daß die Ergebnisse einer Meßreihe nach einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion verteilt sind (etwa normalverteilt), gibt es Testverfahren, so z.B. den χ^2 -Test (Chi-Quadrat-Test von K. Pearson), für die jedoch auf die Literatur¹⁾ verwiesen werden muß.

1.2.8 Fehlerfortpflanzung

Nur die wenigsten Messungen in der Praxis beziehen sich auf Grundgrößen (im obigen Beispiele eine Länge), die direkt meßbar sind; die meisten Messungen betreffen abgeleitete Größen, zu deren Bestimmung mehrere verschiedene Teilgrößen zu messen sind, und die dann aus den Teilgrößen zu berechnen sind. Z.B. ist zur Volumenbestimmung eines Quaders die Messung der drei Seitenlängen a , b , c erforderlich. Jede der Seiten für sich - mehrmals gemessen - liefert einen Mittelwert und dessen Vertrauensbereich v . Man interessiert sich aber für das Volumen V und dessen Vertrauensbereich v_V , und zwar speziell dafür, wie sich die einzelnen Vertrauensbereiche v_a , v_b , v_c zu denjenigen von V , also zu v_V zusammensetzen. Hierfür gilt das Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß: Ist die zu berechnende Größe $Z = Z(a, b, c, \dots)$ und sind $\bar{a} \pm v_a$, $\bar{b} \pm v_b$, $\bar{c} \pm v_c, \dots$ die einzeln gemessenen Größen, so gilt unter der Voraussetzung, daß allen v die gleiche statistische Sicherheit P zugrundeliegt

¹⁾ s. Fußnote 1, S. 32.

$$v_z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial a}\right)^2 v_a^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial b}\right)^2 v_b^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial c}\right)^2 v_c^2 + \dots} \quad (1.30)$$

im Falle des Beispiels beim Quader Volumen also

$$Z = V = V(a, b, c) = abc; \quad \bar{V} = \bar{a}\bar{b}\bar{c};$$

$$v_V = \sqrt{b^2 c^2 v_a^2 + a^2 c^2 v_b^2 + a^2 b^2 v_c^2}; \quad (1.30a)$$

bzw. mit dem relativen Vertrauensbereich noch übersichtlicher geschrieben:

$$\frac{v_V}{\bar{V}} = \sqrt{\left(\frac{v_a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{v_b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{v_c}{\bar{c}}\right)^2} \quad (1.30b)$$

Anstelle des Vertrauensbereichs v gibt man oft (wegen des einfacheren Rechnens) auch den sogenannten Größtfehler (bzw. relativen Größtfehler) an, der größer als der nach Gl. (1.30) berechnete Wert und für eine „obere Abschätzung“ von Nutzen ist. Er ist nicht die geometrische Summe, sondern die algebraische Summe der Beträge der Vertrauensbereiche

$$v_z = \left| \frac{\partial Z}{\partial a} \right| \cdot |v_a| + \left| \frac{\partial Z}{\partial b} \right| \cdot |v_b| + \left| \frac{\partial Z}{\partial c} \right| \cdot |v_c| + \dots \quad (1.31)$$

1.2.9 Gewogenes Mittel

Häufig ist es notwendig, Meßwerte für die gleiche physikalische Größe, die jedoch mit unterschiedlicher Genauigkeit bestimmt sind, z. B. wegen verschiedener Meßverfahren verschiedene Vertrauensbereiche besitzen, zu einem Gesamtmittelwert zusammenzufassen und den Vertrauensbereich dieses Mittelwerts anzugeben. Bei der Bestimmung der Brennweite f einer Sammellinse (vgl. Abschn. 4.1) habe sich z. B. ergeben:

1. aus Messung von Bild- und Gegenstandsweite $f_1 \pm v_1$,
2. durch Autokollimation $f_2 \pm v_2$,
3. nach dem Besselverfahren $f_3 \pm v_3$,
4. aus der Vergrößerung $f_4 \pm v_4$.

Zur Berechnung des Gesamtmittelwertes \bar{f} bewertet man die einzelnen Mittelwerte f_j ($j = 1, \dots, k$) mit Gewichtungsfaktoren g_j (Gewichten), die man umgekehrt proportional zu v_j^2 setzt. Das bedeutet, daß man die Werte f_j mit der Häufigkeit $h_j = g_j$ in Rechnung stellt. Für den gewogenen Mittelwert \bar{f} und seinen Vertrauensbereich \bar{v} gelten dann die Gl. (1.23b) und (1.24a) sinngemäß:

$$\bar{f} = \frac{g_1 f_1 + g_2 f_2 + g_3 f_3 + g_4 f_4}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}; \quad \bar{v} = \frac{\sum_{j=1}^k g_j f_j}{\sum_{j=1}^k g_j} \quad (1.32)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k g_i (\bar{f}_i - \bar{f})^2}{(k-1) \sum_{i=1}^k g_i}} \quad (1.33)$$

Auf den Proportionalitätsfaktor bei der Wichtung kommt es nicht an, er kürzt sich heraus und kann dementsprechend zweckmäßig gewählt werden.

1.2.10 Methode der kleinsten Quadrate

Bei der graphischen Darstellung der Abhängigkeit der Größe y von einer (meist in diskreten, äquidistanten Schritten verändernten) Variablen z ergibt sich häufig statt der auf Grund der physikalischen Gesetzmäßigkeit erwarteten Kurve $y(z)$ eine Punktfolge, deren Punkte infolge der Meßfehler mehr oder weniger stark um die Sollkurve streuen. Einfachster Fall solcher Art ist ein lineares Gesetz, $y = az + b$, und die zugehörige Kurve eine Gerade. Die beste, d. h. von Willkür freieste Ausgleichskurve findet man nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Am Beispiel der Newtonschen Ringe (vgl. Abschn. 4.6.1) sei diese Methode vorgeführt. Die Quadrate des Ringradius q^2 des z -ten Rings, über der Ordnungszahl z des Ringes aufgetragen, sollten eine Punktfolge auf einer Geraden liefern; da eine Gerade durch zwei Punkte bestimmt ist, würde die Messung zweier Radien zur Festlegung einer Geraden ausreichen. Gemessen werden jedoch n Ringe (z. B. $n = 20$), so daß die Gerade $(n - 2)$ -fach überbestimmt ist. Zur Ausgleichsrechnung geht man von Gl. (4.65) in der Form

$$y(z) = q^2 = z\lambda R + R \left\{ \frac{\lambda}{2} - 2d' \right\} = az + b \quad (1.34)$$

aus; gesucht sind diejenigen beiden Konstanten

$$a = \lambda R \quad \text{und} \quad b = R \left\{ \frac{\lambda}{2} - 2d' \right\},$$

für die sich eine mit allen n Meßpunktpaaren (y_i, z_i) „am besten verträgliche“ Gerade ergibt. Angenommen, die beiden Größen a und b , die von allen n Meßpunktpaaren abhängig sind, wären schon bekannt. Es ließe sich dann die Größe $y(z) = az + b$ berechnen und mit den Meßwerten y_i vergleichen: Dabei werden sich im allgemeinen Abweichungen

$$\Delta y_i = y_i - y(z) = v$$

ergeben. Die Gaußsche Forderung ist nun die, daß die Summe der Quadrate aller dieser Abweichungen, also die Größe

$$\sum_{i=1}^n [y_i - y(z)]^2 = \sum_{i=1}^n v^2 = [vv] \quad (1.35)$$

minimal wird. Die eckigen Klammern sind von Gauß für die (von 1, ..., n laufenden) Summationen eingeführt worden (man findet die Gaußsche Schreibweise auch oft zur Vereinfachung der Schreibweise von Gl. (1.23) bis (1.33)).

Man betrachtet also die von den beiden Variablen a und b abhängende Funktion (die Größen a und b werden jetzt als Variable aufgefaßt)

$$F(a, b, n) = [vv] = \sum_{r=1}^n (y_r - ay_r - b)^2 \tag{1.35a}$$

und sucht deren Extrema, und zwar speziell das (absolute) Minimum bezüglich a und b. Nach den Regeln der Differentialrechnung für Funktionen von mehreren Veränderlichen müssen dazu die partiellen Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)_{b=\text{const}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)_{a=\text{const}}$$

beide verschwinden, woraus man die Normalgleichungen $[v] = 0$ und $[zv] = 0$ bzw. bei deren Auflösung die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} a &= \frac{n \sum zy_r - \sum z \sum y_r}{n \sum z^2 - (\sum z)^2} \\ b &= \frac{\sum z^2 \sum y_r - \sum z \sum zy_r}{n \sum z^2 - (\sum z)^2} = \frac{2(2n+1) \sum y_r - 6 \sum zy_r}{n(n-1)} \end{aligned} \tag{1.36}$$

erhält. Die Summationen laufen dabei von $z = 1, \dots, n$, für $n = 20$ ergibt sich speziell wegen $\sum z = n(n+1)/2$ und $\sum z^2 = [(2n+1)/3] \sum z$

$$a = \frac{1}{665} \sum zy_r - \frac{3}{190} \sum y_r \quad b = \frac{41}{190} \sum y_r - \frac{3}{190} \sum zy_r \tag{1.36a}$$

Bildet man also aus den Meßwertpaaren (z, y_r) die Größen $\sum y_r$ und $\sum zy_r$, so kann man nach Gl. (1.36) die Größen a und b berechnen. Man kann jetzt auch nach Gl. (1.35a) die Größe [vv] ermitteln; für die Standardabweichung jeder Einzelmessung ξ gilt hier (nur y_r nicht aber z ist mit Fehler behaftet, weil die z ganze Zahlen sind) $\xi = \sqrt{[vv]/(n-2)}$, für den einfachen Vertrauensbereich der „Bestwerte“ a und b ergibt sich nach den Regeln der Fehlerrechnung

$$\begin{aligned} v_a &= v_y \sqrt{\frac{n}{n [zz] - [z] [z]}} \equiv v_y \sqrt{\frac{n}{n \sum z^2 - (\sum z)^2}} = v_y \sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}} \\ v_b &= v_y \sqrt{\frac{[zz]}{n [zz] - [z] [z]}} \equiv v_y \sqrt{\frac{\sum z^2}{n \sum z^2 - (\sum z)^2}} = v_y \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n(n-1)}} \end{aligned} \tag{1.36b}$$

für $n = 20$ also $v_y = \sqrt{[vv]}/\sqrt{18}$; $v_a = s_y \cdot 1/\sqrt{665}$; $v_b = v_y \cdot \sqrt{43/190}$.

1.3 Rechnen mit kleinen Größen

Bei der Auswertung von Messungen treten häufig Ausdrücke auf, in denen eine Größe sehr klein gegen eine andere ist. In solchen Fällen kann man von Reihenentwicklungen Gebrauch machen, von denen man je nach „Kleinheit der Größe“ nur das erste Glied (erste Näherung) oder das erste und zweite Glied (zweite Näherung) verwendet. Im folgenden sind einige solche Reihen zusammengestellt (nach dem zweiten Glied abgebrochen):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \pm \dots \tag{1.37}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} \pm \dots \tag{1.38}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} \pm \dots \tag{1.39}$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{n} x - \frac{n(n-1)}{2m^2} x^2 \pm \dots \tag{1.40}$$

$$\text{speziell: } m = 1, n = -1: (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 \pm \dots \tag{1.41}$$

$$m = 2, n = 1: (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 \pm \dots \tag{1.42}$$

$$m = 2, n = -1: (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 \pm \dots \tag{1.43}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \pm \dots \tag{1.44}$$

$$e^x \equiv \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} \pm \dots \tag{1.45}$$

Beispiel: $x = 10^{-2}$,
 $\sin x = 10^{-2} - 1,67 \cdot 10^{-7}$;
 $(1+x)^{-1/2} = 1 - 5 \cdot 10^{-3} + \frac{3}{8} \cdot 10^{-3}$.

In $(1+a)$ sei $a \ll 1$, dann schreibt man $1 + \left(\frac{a}{\lambda}\right)$ und wendet obige Formeln an.