1. Angabezettel
Methoden der Theoretischen Physik—Übungen

1)

Die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe A bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$ lauten $A_{11} = 1$, $A_{12} = 1$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = -1$.
(i) Berechnen Sie allgemein die Komponenten von A bezüglich einer um den Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn gedrehten Basis.
(ii) Berechnen Sie die Komponenten von A bezüglich einer um den Winkel $\pi/2$ im Gegenuhrzeigersinn gedrehten Basis.
(iii) Berechnen Sie die Komponenten von A bezüglich einer um den Winkel π im Gegenuhrzeigersinn gedrehten Basis.
(iv) Veranschaulichen Sie den Fall $\pi/2$, indem Sie die Koordinatenachsen des alten und neuen Basissystem aufzeichnen, und die Koordinaten des alten Basissystem im neuen Basissystem ermitteln.

2)

Gegeben sind neue Koordinaten

$$\bar{x} = 3x + 4y,$$

$$\bar{y} = 2x + y.$$

Gesucht sind
(i) die Transformationsmatrix,
(ii) der Maßtensor, und
(iii) die Koordinaten der neuen Basisvektoren im "alten" kartesischen Basissytem.
(iv) Ist die neue Basis orthogonal (Grund für die Antwort angeben)?

3)

Vereinfachen und berechnen Sie mit Hilfe der Indexschreibweise
(i) div rot $\mathbf{v}$;
(ii) rot grad u;
(iii) rot rot $\mathbf{v}$,

(iv) Stellen Sie $\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ als Divergenz eines Tensors zweiter Stufe dar.
(v) Beweisen Sie, dass die Spur von einem Produkt von drei und mehr Matrizen invariant bzgl. zyklischer Vertauschung ist.

4)

Seien $a_i = [(3,4,1)]_i$ und $b_i = [(0,2,-1)]_i$ Tensorkomponenten von Tensoren 1. Stufe bezüglich der Basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Berechnen Sie
(i) $T_{ij} = a_i b_j$;
(ii) die Spur von T; d.h. $\mathrm{Tr}(T_{ij}) = T_{ii}$;
(iii) die Komponenten T'_{ij} des Tensors T bezüglich einer neuen Basis, welche aus der alten Basis durch Drehung von $\pi/4$ um die z-Achse hervorgeht;
(iv) T'_{ii}.
(v) Zeigen Sie, dass die Spur von Tensoren 2. Stufe (nicht aber Tensorfelder) invariant in Bezug auf Rotationen des Koordinatensystems ist.
(vi) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu (v) für ein Tensorfeld an.

5)

Berechnen Sie explizit und detailliert die Komponenten des metrischen Tesors in parabolischen Zylinderkoordinaten x_1, u, v, wobei
$\vec{x} = \left(x_1, \frac{1}{2}(u^2 - v^2), uv\right)$. Sind die Koordinaten orthogonal aufeinander?

6)

Erfinden Sie ein forminvariantes Vektorfeld zweiter Stufe bezüglich Drehungen um den Ursprung.