5. Angabezettel
Methoden der Theoretischen Physik—Übungen

WS 2003/04

Wiederholung

21)

Berechnen Sie die Komponenten des Tensors

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$ in der neuen Basis $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

22)

Berechnen Sie das Tensorprodukt zweier Tensoren erster Stufe $(2,3)$ und $(5,7)$ bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$. Ist das Tensorprodukt kommutativ?

23)

Berechnen Sie die Tensorprodukte $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ und $\sigma_2 \otimes \sigma_1$ zweier Tensoren zweiter Stufe, dargestellt als Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$.

24)

Berechnen Sie
(i) $\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^5}\right)$;
(ii) $\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\right)$, mit $\vec{r} = (r_1,r_2,r_3)$ und $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{r_1},\frac{\partial}{r_2},\frac{\partial}{r_3}\right)$.

25)

Untersuche Sie, ob

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ ein *invarianter* Tensor zweiter Stufe gegenüber Drehungen in der x_2-x_3-Ebene, d.h. gegenüber Transformationen $\overline{x_i} = a_{ij}x_j$ mit

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ist.

26)

Stellen Sie $L(y) = -xy'' - (2-x)y' + \lambda y$ für $0 < x < \infty$ in der Gestalt des Sturm-Liouville-Differentialoperators dar.