

2. Angabezettel WS 2004/2005
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung

9)

Gegeben sind neue Koordinaten

$$\bar{x} = 3x + 4y,$$

$$\bar{y} = -4x + 3y.$$

Gesucht sind

- (i) die Transformationsmatrix,
- (ii) der Maßtensor, und
- (iii) die Koordinaten der neuen Basisvektoren im “alten” kartesischen Basissystem.
- (iv) Ist die neue Basis orthogonal (Grund für die Antwort angeben)?

10)

Die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe A bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ lauten $A_{11} = 1, A_{12} = 1, A_{21} = 1, A_{22} = -1$.

- (i) Berechnen Sie allgemein die Komponenten von A bezüglich einer um den Winkel φ im Uhrzeigersinn gedrehten Basis.
- (ii) Berechnen Sie die Komponenten von A bezüglich einer um den Winkel $\pi/2$ im Uhrzeigersinn gedrehten Basis.
- (iii) Berechnen Sie die Komponenten von A bezüglich einer um den Winkel π im Uhrzeigersinn gedrehten Basis.

11)

Gegeben $A_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_{ij}$ mit $B_{ij} = -B_{ji}$. Vereinfachen Sie $\varepsilon_{mnk}A_k$.

12)

Beweisen Sie folgende Gleichung (aus der Algebra der Drehimpulsen in der Quantenmechanik):

$$\mathcal{L}_i \mathcal{L}_j - \mathcal{L}_j \mathcal{L}_i = i \varepsilon_{ijk} \mathcal{L}_k$$

wobei \mathcal{L} definiert ist als:

$$\mathcal{L}_i = -i \varepsilon_{ijk} x_j \partial_k.$$

13)

Gegeben sei der Tensor (aus der klassischen Mechanik/Trägheitsmoment) $I_{ij} = m(x^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$. Zeigen Sie, dass I sich schreiben lässt als $I_{ij} = -M_{il} M_{lj}$ mit $M_{ij} = \sqrt{m} \varepsilon_{ijk} x_k$.