3. Angabezettel WS 2004/2005
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung

14)

Vereinfachen Sie $a \times (b \times c)$, wobei a, b, c Vektoren sind. Hinweis: Verwenden Sie die Formel zur Umwandlung zweier ε-Tensoren.

15)

Berechnen Sie den zweidimensionalen total antisymmetrischen ε-Tensor und schreiben Sie diesen in Matrixform auf. Ist dieser Tensor drehinvariant? Wie verhält er sich unter Spiegelungen $y \longrightarrow -y$?

16)

Berechnen Sie im dreidimensionalen Vektorraum (i) δ_{ii}, (ii) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$, (iii) $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{ipq}$, (iv) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$.

17)

Berechnen Sie das Verhalten eines beliebigen Tensors zweiter Stufe im dreidimensionalen Vektorraum bei Drehungen um $\pi/2$ um die x- und z-Koordinatenachse.

18)

Berechnen Sie

$$p \times \{\nabla \times (q + x) \exp(ia|x|)\}$$

wobei $a = const.$, p, q konstante Vektoren und $|x| = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ sind.

19)

Zeigen Sie für beliebige dreidimensionale Vektoren a, b, c

$$(a \times b) \times (c \times d) = c[(a \times b) \cdot d] - d[(a \times b) \cdot c].$$

20)

Transformieren Sie die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten. Geben Sie den Maßtensor an.

21)

Zeigen Sie, dass die Spur des Tensorfeldes 2. Stufe $T(x_1, x_2, x_3)$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

bezüglich der Basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ invariant bezüglich einer Drehung der Basivektoren um die x_3-Achse ist, d. h. dass gilt:

$$\mathrm{Tr}[T(x)] = \mathrm{Tr}[T'(x')].$$

22)

Zeigen Sie, dass dieses Resultat allgemein für Tensoren 2. Stufe bezüglich Drehungen gilt. Geben Sie ein Gegenbeispiel für Tensorfelder an.