5. Angabezettel WS 2004/2005
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung
Achtung Stundentausch Vorlesung ↔ Übung zwischen 17.11. und 19.11.2004!

(Wiederholung Tensoren)

30)

Berechnen Sie
(i) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{x} e^{ia|\vec{x}|} \right)$,
(ii) $\vec{\nabla} \times [\vec{x} f(|\vec{x}|)]$,
(iii) $\vec{\nabla} \times \left[\vec{b} \times \vec{x} f(|\vec{x}|) \right]$,

wobei f eine differenzierbare Funktion und $a, b = \text{const.}$, und $|\vec{x}| = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ ist.

31)

Berechnen Sie das Tensorprodukt dreier Tensorfelder erster Stufe (x, y), (x, y) und $(x^2, x^2 + y^2)$ bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$. Ist dieses Tensorfeld drehinvariant? Ist $(x,y) \otimes (x,y)$ drehinvariant?

32)

Berechnen Sie das Tensorprodukt $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ und $\sigma_2 \otimes \sigma_1$ zweier Tensoren σ_1, σ_2 zweiter Stufe, dargestellt als Matrix

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$.
Berechnen Sie deren Differenz $\sigma_1 \otimes \sigma_2 - \sigma_2 \otimes \sigma_1$,

33)

Gegeben sei die *Spiegelung an der x_2-Achse* in einem kartesischen, 2-dimensionalen Koordinatensystem mit der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$.
Berechnen Sie:
(i) die Transformationsgleichungen;
(ii) die Transformationsmatrix **a**; die Determinante von **a**;
(iii) den Maßtensor.
(iv) Ist das neue Koordinatensystem orthogonal (mit Begründung)?

34)

Untersuchen Sie, ob

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 - x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ein forminvarianter Tensor bezüglich Transformationen $x_i' = a_{ij} x_j$ mit

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

ist.