

1. Angabezettel WS 2005/2006
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung

1)

Vereinfachen und berechnen Sie

$$\vec{\nabla} \times g(|\vec{x}|) \vec{\nabla} f(|\vec{x}|),$$

wobei f, g Skalarfelder sind.

2)

Vereinfachen und berechnen Sie

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{x})].$$

3)

Gilt

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] \stackrel{?}{=} (\vec{d} \times \vec{a}) \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Bitte führen Sie die Berechnung explizite durch.

4)

Die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe A bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ lauten $A_{11} = 1, A_{12} = 2, A_{21} = 3, A_{22} = 4$. Berechnen Sie die Komponenten von A bezüglich einer um den Winkel φ im Uhrzeigersinn gedrehten Basis.

5)

Gegeben seien die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Stellen Sie denselben Tensor bezüglich der Basen

(i)

$$\{(-1, 0), (0, -1)\},$$

sowie

(ii)

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \right\}$$

dar.

Wie lauten die Maßtensoren?

6)

Zeigen Sie, dass die Spur des Tensorfeldes 2. Stufe $T(x_1, x_2, x_3)$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

bezüglich der Basis $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ invariant bezüglich einer Drehung der Basivektoren um die x_3 -Achse ist, d. h. dass gilt:

$$\text{Tr}[T(\mathbf{x})] = \text{Tr}[T'(\mathbf{x}')].$$

7)

Zeigen Sie, dass dieses Resultat allgemein für Tensoren 2. Stufe bezüglich Drehungen gilt. Geben Sie ein Gegenbeispiel für Tensorfelder an.

8)

Ist $\vec{B} = (4x - 2y, 2x + 4y, x^2 + y^2)$ ein forminvariantes Vektorfeld bezüglich Basisdrehungen in der $(x - y)$ -Ebene?

9)

Geben Sie ein forminvariantes Tensorfeld A ($\neq \text{const.}$) vierter Stufe A in \mathbb{R}^2 bezüglich beliebiger zweidimensionaler Drehungen an. Wie lautet insbesondere die Komponente A_{1212} bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$?