

2. Angabezettel WS 2005/2006
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung

10)

Berechnen Sie das Tensorprodukt dreier Tensoren erster Stufe $(1, 2)$, $(3, 5)$ und $(7, 11)$ bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Sind diese Tensoren dreihinvariant?

11)

Berechnen Sie das Tensorprodukt dreier Tensoren $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $\text{diag}(1, 1)$ bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$, wobei diag die Diagonalmatrix ist. Ist $\text{diag}(1, 1)$ bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ dreihinvariant?

12)

Berechnen Sie das Tensorprodukt $\sigma_1 \otimes \sigma_3$ zweier Tensoren σ_1 , σ_3 zweiter Stufe, dargestellt als Matrix

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

13)

Ist das Tensorprodukt kommutativ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort durch ein Argument in Komponentenschreibweise. Geben Sie ein Beispiel mit Tensoren zweiter Stufe, etwa aus dem vorigen Beispiel.

14)

Ist das Tensorprodukt assoziativ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort durch ein Argument in Komponentenschreibweise.

15)

Vereinfachen und berechnen Sie mit Hilfe der Indeschreibweise

$$\text{div rot } \mathbf{v}.$$

16)

Vereinfachen und berechnen Sie mit Hilfe der Indeschreibweise

$$\text{rot grad } u.$$

17)

Vereinfachen und berechnen Sie mit Hilfe der Indeschreibweise

$$\text{rot rot } \mathbf{v}.$$

18)

Stellen Sie

$$\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

als Divergenz eines Tensors zweiter Stufe dar.

19)

Vereinfachen und berechnen Sie

$$\vec{A} \left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right],$$

wobei $\vec{A}(x)$ ein Vektorfeld ist.

20)

Gegeben sind neue Koordinaten

$$\bar{x} = 3x + 4y,$$

$$\bar{y} = 2x + y.$$

Gesucht sind

(i) die Transformationsmatrix,

(ii) der Maßtensor, und

(iii) die Koordinaten der neuen Basisvektoren im "alten" kartesischen Basissystem.

(iv) Ist die neue Basis orthogonal? (Bitte Grund für die Antwort angeben.)

21)

Berechnen Sie explizit und detailliert die Komponenten des metrischen Tensors in parabolischen Zylinderkoordinaten x_1, u, v , wobei

$$\vec{x} = \left(x_1, \frac{1}{2}(u^2 - v^2), uv \right).$$

Sind die Koordinaten orthogonal aufeinander?