2. Angabezettel WS 2006/2007
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung

17)

Das Volumen V sei von einer Fläche F eingeschlossen. Berechnen Sie das Integral $\int_F \vec{r}d\vec{f}$.

18)

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes, daß der Flächeninhalt einer von einer Kurve C eingeschlossenen Fläche F durch

$$\frac{1}{2}\oint(xdy - ydx)$$

gegeben ist. Hinweis: Betrachten Sie $\oint_c \vec{A}d\vec{r}$ mit $A = (-y, x, 0)$.

19)

Bestimmen Sie mit Hilfe des vorigen Ergebnisses die Fläche einer Ellipse $\{(a\cos t, b\sin t) \mid 0 \leq t < 2\pi\}$.

20)

Berechnen Sie das Integral $\int_{K(r=a)} \Delta\Phi(|\vec{r}|)d^3\vec{r} = \int_{K(r=a)} \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi(|\vec{r}|)\right)d^3\vec{r}$ über eine Kugel K mit dem Radius a. Hinweis: verwenden Sie den Satz von Gauß.

21)

Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld $\vec{A} = (4x - y, -yz^2, -y^2z)$ und die obere Halbsphäre vom Radius 1.

22)

Zeigen Sie die Orthogonalität und Vollständigkeit des durch die Kugelkoordinaten gebildeten Basissystems. Ist die Darstellung jedes Vektors in dieser Basis eindeutig?

23)

Berechnen Sie das Tensorprodukt $\sigma_1 \otimes \sigma_3$ zweier Tensoren σ_1, σ_3 zweiter Stufe, dargestellt als Matrix

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$.

24)

Untersuchen Sie, ob der Tensor

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 - x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis ein forminvarianter Tensor bezüglich Transformationen $x'_i = a_{ij}x_j$ mit

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

ist.

25)

Erfinden Sie einen Tensorfeld, dessen Spur forminvariant gegenüber Drehungen im dreidimensionalen Raum ist, das aber selbst nicht forminvariant ist.