3. Angabezettel WS 2006/2007
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung

26)

Berechnen Sie das Tensorprodukt $A \otimes \mathbf{1}$ zweier Tensoren A und $\mathbf{1}$ zweiter Stufe, dargestellt als Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der kartesischen Standardbasis.

27)

Zeigen Sie, dass die Spur des Tensorfeldes 2. Stufe $T(x_1, x_2, x_3)$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

bezüglich der Basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ invariant bezüglich einer Drehung der Basivektoren um die x_3-Achse ist, d. h. dass $\mathrm{Tr}[T(\mathbf{x})] = \mathrm{Tr}[T'(\mathbf{x}')]$.

28)

Ist das Tensorprodukt kommutativ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort durch ein Argument in Komponentenschreibweise. Geben Sie ein Beispiel mit Tensoren zweiter Stufe.

29)

Ist das Tensorprodukt assoziativ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort durch ein Argument in Komponentenschreibweise.

30)

Separieren Sie die inhomogene d'Alembertsche Differentialgleichung (in 3+1 Dimensionen)

$$\Phi = (\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2})\Phi = \lambda\Phi$$

im kartesischen Koordinatensystem.

31)

Separieren Sie die homogene Laplace-Gleichung $\triangle\Phi = 0$ in parabolischen Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi \\ \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}(\xi - \eta) \end{pmatrix}.$$

32)

Stellen Sie den Differentialoperator $L(w) = z^2 w'' + z w'$ für $0 < z < \infty$ in der Gestalt des Sturm-Liouville-Differentialoperators $\frac{1}{p(z)}\left[-\frac{d}{dz}\left(f(z)\frac{d}{dz}\right) + g(z)\right]$ dar.

33)

Bringen Sie

$$L(y) = -x^2 y'' + x y' + y$$

$0 < x < \infty$ auf die Gestalt des Sturm-Liouville-Differentialoperators.