

**3. Angabezettel WS 2007/2008**  
**135.044 Mathematische Methoden der Theoretischen**  
**Physik—Übung**

23)

Vereinfachen und berechnen Sie

$$\vec{x} \left[ \vec{x} \times \vec{\nabla} f(x) \right],$$

wobei  $x = |\vec{x}|$  ist.

24)

Vereinfachen und berechnen Sie

$$\vec{A} \times \left[ \vec{\nabla} \times (\vec{B} + \vec{x}) f(x) \right],$$

wobei  $\vec{A}(x)$  ein Vektorfeld,  $f(x)$  ein Skalarfeld,  $\vec{B} = \text{const.}$  und  $x = |\vec{x}|$  ist.

25)

Gegeben sei eine lineare Transformation in der Ebene, welche einer Drehung des Basissystems um  $135^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn entspricht. Berechnen Sie (i) die Transformationsmatrix  $a_{ij}$ ; (ii) den metrischen Tensor im neuen Koordinatensystem; (iii) die Koordinaten der neuen Achsen im alten Basisystem unter Zuhilfenahme der (inversen) Transformationsmatrix.

26)

Berechnen Sie explizit und detailliert die Komponenten des metrischen Tensors in parabolischen Zylinderkoordinaten  $x_1, u, v$ , wobei  $\vec{x} = (x_1, \frac{1}{2}(u^2 - v^2), uv)$ . Sind die Koordinaten orthogonal aufeinander?

27)

Gegeben sind neue Koordinaten

$$\bar{x} = 3x + 4y,$$

$$\bar{y} = 2x + y.$$

Gesucht sind (i) die Transformationsmatrix, (ii) der Maßtensor, und (iii) die Koordinaten der neuen Basisvektoren im "alten" kartesischen Basissystem. (iv) Ist die neue Basis orthogonal (Grund für die Antwort angeben)?

28)

Separieren Sie die homogene d'Alembertsche Differentialgleichung (in 3+1 Dimensionen)

$$\square\Phi = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = 0$$

in parabolischen Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi \\ \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi \\ \frac{1}{2}(\xi - \eta) \end{pmatrix}.$$

29)

Stellen Sie  $L(y) = -xy'' - (2-x)y' + \lambda y$  für  $0 < x < \infty$  in der Gestalt des Sturm-Liouville-Differentialoperators dar.

30)

(i) Transformieren Sie den Differentialoperator

$$L(y) = -e^{-2x}y'' + 3e^{-2x}y' + y\sqrt{x}$$

auf die Sturm-Liouvillesche Gestalt.

(ii) Transformieren Sie die Differentialgleichung  $L(y) = \lambda y$  durch die Sturm-Liouville'sche Transformation.