

2. Angabezettel WS 2008/2009
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung

7)

Vereinfachen und berechnen Sie mit Hilfe der Index- oder Komponentenschreibweise

$$\vec{\nabla} \times g(|\vec{x}|) \vec{\nabla} f(|\vec{x}|),$$

wobei f, g Skalarfelder sind.

8)

Vereinfachen und berechnen Sie mit Hilfe der Index- oder Komponentenschreibweise

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{x})].$$

9)

Gilt

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] \stackrel{?}{=} (\vec{d} \times \vec{a}) \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Bitte führen Sie die Berechnung mit Hilfe der Index- oder Komponentenschreibweise explizite durch.

10)

Vereinfachen und berechnen Sie mit Hilfe der Index- oder Komponentenschreibweise

$$\vec{A} \left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right],$$

wobei $\vec{A}(x)$ ein Vektorfeld ist.

11)

Vereinfachen und berechnen Sie mit Hilfe der Index- oder Komponentenschreibweise

$$\vec{x} \left[\vec{x} \times \vec{\nabla} f(x) \right],$$

wobei $f(x)$ ein Skalarfeld und $x = |\vec{x}|$ ist.

12)

Vereinfachen und berechnen Sie mit Hilfe der Index- oder Komponentenschreibweise

$$\vec{A} \times \left[\vec{\nabla} \times (\vec{B} + \vec{x}) f(x) \right],$$

wobei $\vec{A}(x)$ ein Vektorfeld, $f(x)$ ein Skalarfeld, $\vec{B} = \text{const.}$ und $x = |\vec{x}|$ ist.

13)

Berechnen Sie das Tensorprodukt dreier Tensoren erster Stufe $(1, 2)$ $(3, 5)$ und $(7, 11)$ bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Sind diese Tensoren dreihinvariant?

14)

Berechnen Sie das Tensorprodukt dreier Tensoren $(0, 1)$ $(1, 0)$ und $\text{diag}(1, 1)$ bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$, wobei diag die Diagonalmatrix ist. Ist $\text{diag}(1, 1)$ bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ dreihinvariant?

15)

Berechnen Sie das Tensorprodukt $\sigma_1 \otimes \sigma_3$ zweier Tensoren σ_1, σ_3 zweiter Stufe, dargestellt als Matrix

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

16)

Ist das Tensorprodukt kommutativ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort durch ein Argument mit Hilfe der Index- oder Komponentenschreibweise. Geben Sie ein Beispiel mit Tensoren zweiter Stufe, etwa aus dem vorigen Beispiel.

17)

Ist das Tensorprodukt assoziativ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort durch ein Argument mit Hilfe der Index- oder Komponentenschreibweise.

