3. Angabezettel WS 2008/2009
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung

18)

Geben Sie ein forminvariantes Tensorfeld A ($\neq$ const.) fünfter Stufe im dreidimensionalen reelen Vektorraum bezüglich beliebiger Drehungen an. Wie lautet insbesonders die Komponente A_{11223} bezüglich der Basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$? Geben Sie eine Begründung für die Forminvarianz an.

19)

Betrachte das Tensorfeld

$$T_{ij} = x_i x_j - \frac{|x|^2}{2}\delta_{ij}$$

im 2–dimensionalen Vektorraum.

(i) Ist es forminvariant bezüglich orthogonaler Drehungen? Begründen Sie die Antwort.
(ii) Bilden Sie die Spur.
(iii) Berechnen Sie $\varepsilon_{ijk}T_{jk}$.
(iv) Berechnen Sie $\partial_i T_{ij}$.

20)

(i) Berechnen Sie explizit die Komponenten des metrischen Tensors in elliptischen Zylinderkoordinaten u, v, z, wobei

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ z \end{pmatrix},$$

und $0 \leq u$, und $0 \leq v \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

(ii) Ist diese Basis orthogonal?

21)

Untersuche Sie, ob

$$\text{(i)} \qquad A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{(ii)} \qquad B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ forminvariante Tensoren zweiter Stufe gegenüber Transformationen $\bar{x}_i = a_{ij}x_j$ mit

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind.

22)

Zeigen Sie, dass die Spur des Tensorfeldes 2. Stufe $T(x_1,x_2,x_3)$

$$T(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

bezüglich der Basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ invariant bezüglich einer Drehung der Basivektoren um die x_3-Achse ist, d. h. dass gilt:

$$\mathrm{Tr}[T(\mathbf{x})] = \mathrm{Tr}[T'(\mathbf{x}')].$$

23)

Zeigen Sie, dass dieses Resultat allgemein für Tensoren 2. Stufe bezüglich Drehungen gilt. Geben Sie ein Gegenbeispiel für Tensorfelder an.

24)

Berechnen Sie explizit und detailliert die Komponenten des metrischen Tesors in parabolischen Zylinderkoordinaten x_1, u, v, wobei $\vec{x} = \left(x_1, \frac{1}{2}(u^2 - v^2), uv\right)$. Sind die Koordinaten orthogonal aufeinander?