

4. Angabezettel WS 2009/2010
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung

26)

Vereinfachen Sie durch Darstellung in Komponentenschreibweise $a \times (b \times c)$, wobei a, b, c Vektoren sind. Hinweis: Verwenden Sie die Formel zur Umwandlung zweier ε -Tensoren.

27)

Berechnen Sie den zweidimensionalen total antisymmetrischen ε -Tensor und schreiben Sie diesen in Matrixform auf. Ist dieser Tensor dreihinvariant? Wie verhält er sich unter Spiegelungen $y \rightarrow -y$?

28)

Berechnen Sie im dreidimensionalen Vektorraum (i) δ_{ii} , (ii) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$, (iii) $\varepsilon_{ipq}\varepsilon_{jpq}$, (iv) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$.

29)

Berechnen Sie das Verhalten eines beliebigen Tensors zweiter Stufe im dreidimensionalen Vektorraum bei Drehungen um $\pi/2$ um die x - und z -Koordinatenachse.

30)

Berechnen Sie

$$p \times \{\nabla \times (q + x) \exp(ia|x|)\}$$

wobei $a = \text{const.}$, p, q konstante Vektoren und $|x| = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ sind.

31)

Zeigen Sie für beliebige dreidimensionale Vektoren a, b, c

$$(a \times b) \times (c \times d) = c[(a \times b) \cdot d] - d[(a \times b) \cdot c].$$

32)

Transformieren Sie die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten. Geben Sie den Maßtensor an.

33)

Zeigen Sie, dass die Spur des Tensorfeldes 2. Stufe $T(x_1, x_2, x_3)$

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

bezüglich der Basis $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ invariant bezüglich einer Drehung der Basisektoren um die x_3 -Achse ist, d. h. dass gilt:

$$\text{Tr}[T(x)] = \text{Tr}[T'(x')].$$

34)

Zeigen Sie, dass dieses Resultat allgemein für Tensoren 2. Stufe bezüglich Drehungen gilt. Geben Sie ein Gegenbeispiel für Tensorfelder an.

