5. Angabezettel WS 2009/2010
135.044 Mathematische Methoden in der Physik—Übung

35)

Berechnen Sie explizit und detailliert die Komponenten des metrischen Tesors in parabolischen Zylinderkoordinaten x_1, u, v, wobei
$\vec{x} = \left(x_1, \frac{1}{2}(u^2 - v^2), uv\right)$. Sind die Koordinaten orthogonal aufeinander?

36)

Geben Sie ein forminvariantes Tensorfeld A ($\neq$ const.) vierter Stufe A in $\mathbb{R}^2$ bezüglich beliebiger zweidimensionaler Drehungen an. Wie lauten insbesonders die Komponenten A_{ijkl} bezüglich der Basis $\{(1,0),(0,1)\}$? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

37)

Betrachte das Tensorfeld

$$T_{ij} = x_i x_j - \frac{|x|^2}{2}\delta_{ij}$$

im 2–dimensionalen Vektorraum.

(i) Ist es forminvariant bezüglich orthogonaler Drehungen? Begründen Sie die Antwort.
(ii) Bilden Sie die Spur.
(iii) Berechnen Sie $\varepsilon_{ijk}T_{jk}$.
(iv) Berechnen Sie $\partial_i T_{ij}$.

38)

Ist das Tensorfeld

$$T = \begin{pmatrix} xy & x^2 & 0 \\ y^2 & xy & 0 \\ 0 & 0 & x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ forminvariant unter der Transformation

$$a = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

39)

(i) Berechnen Sie explizit die Komponenten des metrischen Tensors in elliptischen Zylinderkoordinaten u,v,z, wobei

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ z \end{pmatrix},$$

und $0 \leq u$, und $0 \leq v \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

(ii) Ist diese Basis orthogonal?

40)

Parabolische Zylinderkoordinaten sind definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi \\ \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}(\xi-\eta) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die neuen Einheitsvektoren e_ξ, e_η, e_φ, sowie Gradient und Divergenz in parabolischen Zylinderkoordinaten.