Nachtest - Lösungen **9.3.2012**

1 Indexschreibweise

$(\mathbf{x}\times\nabla)\times(\nabla r)\to\varepsilon_{ijk}\left(\varepsilon_{jlm}x_l\partial_m\right)\left(\partial_k r\right)$

$= \underbrace{\varepsilon_{kij}\varepsilon_{jlm}}_{\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il}} x_l\partial_m\underbrace{\partial_k r}_{\frac{x_k}{r}} = \left(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il}\right)x_l\left[\frac{1}{r}\big(\underbrace{\partial_m x_k}_{\delta_{mk}}\big)+x_k\underbrace{\partial_m\left(\frac{1}{r}\right)}_{-\frac{1}{r^2}\underbrace{\partial_m r}_{\frac{x_m}{r}}}\right]$

$=\left(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il}\right)\left[\frac{x_l\delta_{mk}}{r}-\frac{x_lx_kx_m}{r^3}\right]$

$=\frac{x_i}{r}-\underbrace{x_kx_k}_{r^2}\frac{x_i}{r^3}-\frac{x_i}{r}\underbrace{\delta_{kk}}_{3}+\underbrace{\frac{x_ix_kx_k}{r^3}}_{\frac{x_i}{r}}=-\frac{2x_i}{r}\to-\frac{2\mathbf{x}}{r}$

2 Delta-Distribution

Lösungsweg 1:

$I=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{0}dy\quad\underbrace{\delta(x^2-y^2)}_{\frac{1}{|2x|}\delta(x-y)+\frac{1}{|2x|}\delta(x+y)}\quad\delta(x^2-y-2)g(x,y)$

Integration über x:

$=\int_{-\infty}^{0}dy\left[\frac{1}{|2y|}\delta(y^2-y-2)g(y,y)+\frac{1}{|2y|}\delta(y^2-y-2)g(-y,y)\right]$

$=\int_{-\infty}^{0}dy\frac{1}{|2y|}\delta(y^2-y-2)\left[g(y,y)+g(-y,y)\right]$

Faktorisierung: $y^2-y-2=(y-2)(y+1)$

Ableitung: $\left(y^2-y-2\right)'=2y-1$

Integrationsgrenzen erlauben nur Lösung $y=-1$

$=\int_{-\infty}^{0}dy\frac{1}{|2y|}\left[\underbrace{\frac{1}{|2y-1|}\delta(y-2)}_{\to 0\ (y>0)}+\underbrace{\frac{1}{|2y-1|}\delta(y+1)}_{\frac{1}{3}\delta(y+1)}\right]\left[g(y,y)+g(-y,y)\right]$

$=\frac{1}{6}\left[g(-1,-1)+g(1,-1)\right]$

Lösungsweg 2:

$I=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{0}dy\delta(x^2-y^2)\underbrace{\delta(x^2-y-2)}_{\delta(y-x^2+2)}g(x,y)$

Integration über y: $y=x^2-2$

Integrationsgrenze: $\theta(-y)=\theta(-x^2+2)$

$=\int_{-\infty}^{\infty}dx\delta(\underbrace{x^2-\left(x^2-2\right)^2}_{-x^4+5x^2-4})g(x,x^2-2)\theta(-x^2+2)$

Faktorisierung: $x^4-5x^2+4=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

Ableitung: $\left(-x^4+5x^2-4\right)'=-4x^3+10x$

Theta-Funktion bringt nur Lösungen $x=\pm1$

$=\int_{-\infty}^{\infty}dx\left[\underbrace{\frac{1}{|-4x^3+10x|}\delta(x-1)}_{\frac{1}{6}\delta(x-1)}+\underbrace{\frac{1}{|-4x^3+10x|}\delta(x+1)}_{\frac{1}{6}\delta(x+1)}\right]g(x,x^2-2)$

$=\frac{1}{6}\left[g(1,-1)+g(-1,-1)\right]$

3 Greensche Funktion

a) $\mathcal{L}_x = -\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} - 2$, $f(x) = 2$, $\mathcal{L}_x y(x) = f(x)$.
Ansatz: $G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k) e^{ik(x-x')} dk$
und $\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk$ einsetzen in
$\mathcal{L}_x G(x,x') = \delta(x-x')$,
$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} - 2\right) G(x,x') = \delta(x-x')$,
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} - 2\right) e^{ik(x-x')} dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk$,
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)\left(k^2 - 3ik - 2\right) e^{ik(x-x')} dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk$.
Vergleich der Integranden:
$\tilde{G}(k)\left(k^2 - 3ik - 2\right) = 1. \quad \rightarrow \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2-3ik-2}$.
b)
$G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2-3ik-2} dk$.
$k^2 - 3ik - 2 = (k-2i)(k-i)$
Pole liegen bei $k = 2i$ und $k = i$. Für $x - x' > 0$: Großkreis oben schließen ($ik = i(\mathrm{Re}k + i\mathrm{Im}k) = i\mathrm{Re}k - \mathrm{Im}k$: Für $\mathrm{Im}k > 0$ exponentiell gedämpft). Zwei Pole liegen im Großkreis. Für $x - x' < 0$: Großkreis unten schließen ($\rightarrow$ Vorzeichen). Kein Pol liegt im Großkreis.
$G(x,x') = \theta(x-x')\left[2\pi i \mathrm{Res}_{k\to 2i} \frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2-3ik-2} + 2\pi i \mathrm{Res}_{k\to i}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2-3ik-2}\right] - \theta(x'-x)\times 0$
$= \theta(x-x')\left[2\pi i \lim_{k\to 2i}(k-2i)\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{(k-2i)(k-i)} + 2\pi i \lim_{k\to i}(k-i)\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{(k-2i)(k-i)}\right]$
$= \theta(x-x')\left[i\frac{e^{-2(x-x')}}{i} + i\frac{e^{-(x-x')}}{-i}\right]$
$= \theta(x-x')\left[e^{-2(x-x')} - e^{-(x-x')}\right]$.
c)
Randbedingung: $G(0, x' > 0) = 0$ ist bereits erfüllt.
Allgemein: Homogene Greensche Funktion über Ansatz:
$G = G_I + Ae^{-2(x-x')} + Be^{-(x-x')}$.
$G(0, x' > 0) = 0 + Ae^{2x'} + Be^{x'} = 0$. (I)
$G'(x,x') = -2Ae^{-2(x-x')} - Be^{-(x-x')}$.
$G'(0, x' > 0) = -2Ae^{2x'} - Be^{x'} = 0$. (II)
Aus (I) und (II) folgt: $A = 0$, $B = 0$.
$\rightarrow G(x,x') = G_I = \theta(x-x')\left[e^{-2(x-x')} - e^{-(x-x')}\right]$.
d)
Lösung: $y(x) = \int_0^{\infty} G(x,x') f(x') dx' = \int_0^x dx' e^{-2(x-x')} 2 - \int_0^x dx' e^{-(x-x')} 2$
$= 2\left.\frac{e^{-2(x-x')}}{-2}\right|_{x'=0}^{x} - 2\left.\frac{e^{-(x-x')}}{-1}\right|_{x'=0}^{x}$
$= -1 + e^{-2x} + 2 - 2e^{-x}$
$= 1 + e^{-2x} - 2e^{-x}$.