1. Tutorium[1] **für 21.10.2011**

1.1 Rang, Determinante und Spur

Bestimme Rang, Determinante und Spur der folgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.2 Projektoren

a) Gegeben sei ein Einheitsvektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$. Wie lautet der zugehörige Projektor $\mathbf{E}$?
b) Zeige, dass $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$.
c) Berechne $(\mathbf{1} - \mathbf{E})\mathbf{x}$.

1.3 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

a) Stelle das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren anhand folgender Vektoren graphisch dar:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zeichne auch $p_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}_2)$ ein.
b) Verwende das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, um folgende Vektoren zu orthogonalisieren:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet die zugehörige orthonormierte Basis?
c) Finde einen weiteren Vektor, der orthogonal zu allen Vektoren der orthonormierten Basis aus (b) ist.

[1]Die Verwendung eines Taschenrechners ist für dieses Tutorium vorteilhaft. Beim Test würden kleinere Zahlen vorkommen, die ohne Taschenrechner zu bewältigen sind.

1.4 Duale Basis

Gegeben sei folgende nicht-orthogonale Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ mit

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Stelle den Vektor $\mathbf{x} = 6\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3$ in der gegebenen Basis $\mathcal{B}$ dar (Standardbasis: $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).
b) Berechne die duale Basis $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*, \mathbf{f}_3^*\}$.
c) Stelle den Vektor $\mathbf{x}$ in der dualen Basis[2] dar und bestimme somit die Komponenten von $\mathbf{x}^*$ in der Basis $\mathcal{B}^*$.
d) Berechne die Länge von $\mathbf{x}$ mittels $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{[\mathbf{x}, \mathbf{x}^*]}$ sowohl in der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ als auch in der Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ und vergewissere Dich, dass in beiden Fällen die gleiche Länge herauskommt.

Ankreuzbar: 1abc, 2abc, 3a, 3bc, 4ab, 4cd

[2] Überprüfung des Zwischenergebnisses: $\mathrm{Tr}\mathcal{B}^* = -42$; $\mathbf{f}_3^* = \begin{pmatrix} 7 \\ . \\ . \end{pmatrix}$.