1. Tutorium - Lösungen **21.10.2011**

1.1 Rang, Determinanten und Spur

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ -I \\ -2I \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} +II \\ /(-2) \\ +II \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$Rang=2, Determinante=0, Spur=$1+4=5$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ -3I \\ -2I \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$Rang=1, Determinante=0, Spur=$1+6-2=5$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ \times 1 \\ -II \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -III \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$Rang=3, Determinante=1, Spur=$1+1+1=3$

1.2 Projektoren

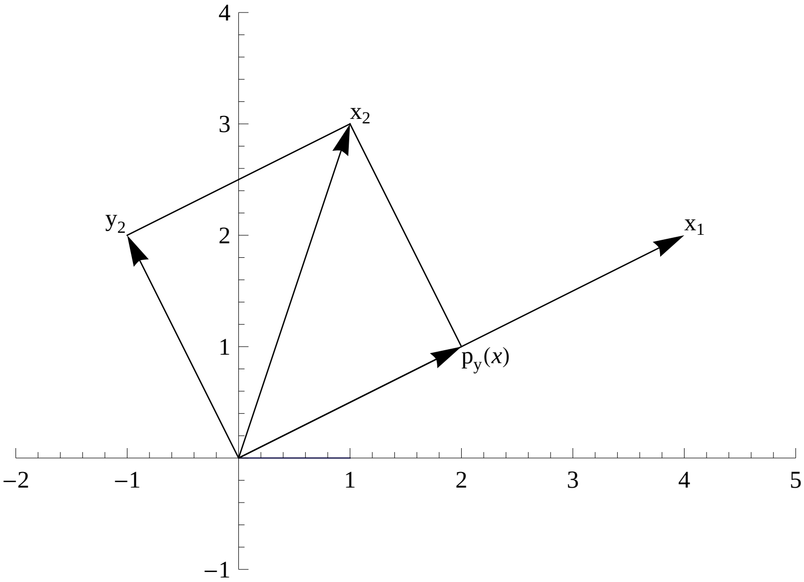
a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$. $\mathbf{E} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} (\cos\varphi, \sin\varphi) = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{E}^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$.

c) $(\mathbf{1} - \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{1x} - \mathbf{Ex} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

1.3 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

a)



$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Erster Basisvektor ist ident: $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Projektion von $\mathbf{x}_2$ auf $\mathbf{y}_1$ liefert $p_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}_2) = \frac{\langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{y}_1 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_1 \rangle} y_1 = \underbrace{\frac{1 \times 4 + 3 \times 2}{4 \times 4 + 2 \times 2}}_{10/20} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - p_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - p_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}_2) = x_2 - \frac{\langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{y}_1 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_1 \rangle} y_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{-5+2-15-12}{1+4+9+16}}_{-30/30} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - p_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}_3) - p_{\mathbf{y}2}(\mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{x}_3 | \mathbf{y}_1 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_1 \rangle} \mathbf{y}_1 - \frac{\langle \mathbf{x}_3 | \mathbf{y}_2 \rangle}{\langle \mathbf{y}_2 | \mathbf{y}_2 \rangle} \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{60}{30} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{-30}{30} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die zugehörige orthonormierte Basis::

$\hat{\mathbf{y}}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{y}}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\mathbf{y}}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Einen einfachen Vektor raten, Gram-Schmidt anwenden, und hoffen, dass er nicht im selben Unterraum liegt, den die ursprünglichen drei Vektoren aufspannen.

z.B. $\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{x}_4 - p_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}_4) - p_{\mathbf{y}_2}(\mathbf{x}_4) - p_{\mathbf{y}_3}(\mathbf{x}_4) = \frac{30}{30} \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{-4}{30} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{30} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ könnte man auch das Kreuzprodukt in vier Dimensionen verwenden, um den vierten Vektor auszurechnen (siehe Wikipedia: Kreuzprodukt - Kreuzprodukt im R^n).

1.4 Duale Basis

a) Wir suchen Koeffizienten x_1, x_2, x_3 mit $\mathbf{x} = 6\mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_3 = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + x_3\mathbf{f}_3$. Das ist ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten.

In der Notation des Vorlesungsskriptums: $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$. Das System löst man am Einfachsten durch Berechnung der Inversen nach dem Gauß-Jordan-Algorithmus, da wir die Inverse sowieso für die duale Basis benötigen:

$$(\mathbf{B}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times 1 \\ -2I \\ -3I \end{array} \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +2II \\ \times(-1) \\ +2II \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +5III \\ -III \\ \times(-1) \end{array} \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -38 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right) = (\mathbf{I}|\mathbf{B}^{-1})$$

Also sind die Komponenten in der Basis $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -38 & 12 & 5 \\ 9 & -3 & -1 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Die duale Basis kann man von den Zeilen der obigen inverser Matrix $\mathbf{B}^{-1}$ ablesen:
$\mathbf{f}_1^* = (-38, 12, 5)$, $\mathbf{f}_2^* = (9, -3, -1)$, $\mathbf{f}_3^* = (7, -2, -1)$.

c) Von $\mathbf{x} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^* \\ \mathbf{f}_2^* \\ \mathbf{f}_3^* \end{pmatrix} = (6, 15, 10) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{pmatrix}$ ausgehend liefert Multiplikation von rechts mit $\mathbf{B}$ die Komponenten des dualen Vektors $\mathbf{x}^* = (6, 15, 10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (66, 137, 183)$.

d) Berechnung der Länge in der Standardbasis: $\|x\| = \sqrt{[\mathbf{x}, \mathbf{x}^*]} = \sqrt{6^2 + 15^2 + 10^2} = \sqrt{361} = 19$.
Berechnung in der Basis $\mathcal{B}$: $\|x\| = \sqrt{[\mathbf{x}, \mathbf{x}^*]} = \sqrt{2 \times 66 - 1 \times 137 + 2 \times 183} = \sqrt{361} = 19$.