2. Tutorium **für 28.10.2011**

2.1 Kommutator

Zeige die folgenden Kommutatorrelationen für Matrizen A, B, und C:
a) $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$.
b) $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$ (Jacobi-Identität).
c) Zeige $e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$ durch Taylor-Expansion bis zur Ordnung $O(\mathbf{A}^2)+O(\mathbf{B}^2)$ (d.h. alle Terme, in denen $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, ... oder $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{B}^3$, ... vorkommt, können vernachlässigt werden, aber $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$ sollen berücksichtigt werden).

2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
Gib die Eigenwerte und Eigenvektoren an für
a) $\mathbf{A}$,
b) $\mathbf{A}^2$,
c) $\mathbf{A}^3$,
d) $\mathbf{A}^{-1}$,
e) $\mathbf{A} + 3\mathbf{I}$.
(Hinweis: Anstatt die Säkulargleichung für jeden Fall (b) bis (e) separat auszurechnen, kann man sich auch allgemein überlegen, wie die Eigenvektoren und Eigenwerte zu einer gegebenen Matrix $\mathbf{A}$ mit den angegebenen Rechenoperationen ausschauen müssen.)

2.3 Spektraltheorem

a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die normierten Eigenvektoren?
b) Bestimme die zu den Eigenvektoren gehörenden Projektoren $\mathbf{E}_i$ und überprüfe, dass sich die Matrix $\mathbf{A}$ in der spektralen Form $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{E}_i$ schreiben lässt.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2abc, 2de, 3a, 3b