2. Tutorium - Lösungen **28.10.2011**

2.1 Kommutator

a) $[\mathbf{A},\mathbf{BC}] = \mathbf{ABC} - \mathbf{BCA} = \mathbf{ABC} - \mathbf{BAC} + \mathbf{BAC} - \mathbf{BCA} = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A},\mathbf{C}]$.

b) $[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]] + [\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]$

$= \mathbf{A}(\mathbf{BC} - \mathbf{CB}) - (\mathbf{BC} - \mathbf{CB})\mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{CA} - \mathbf{AC}) - (\mathbf{CA} - \mathbf{AC})\mathbf{B} + \mathbf{C}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) - (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{C}$

$= \mathbf{ABC} - \mathbf{ACB} - \mathbf{BCA} + \mathbf{CBA} + \mathbf{BCA} - \mathbf{BAC} - \mathbf{CAB} + \mathbf{ACB} + \mathbf{CAB} - \mathbf{CBA} - \mathbf{ABC} + \mathbf{BAC}$

$= 0.$

c) linke Seite: $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = (1 + \mathbf{A} + ...)(1 + \mathbf{B} + ...) = 1 + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{AB} + O(\mathbf{A}^2) + O(\mathbf{B}^2)$

rechte Seite: $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]} = 1 + \left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\right)^2 + ...$

$= 1 + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{AB} - \frac{1}{2}\mathbf{BA} + \frac{1}{2}\mathbf{AB} + \frac{1}{2}\mathbf{BA} + O(\mathbf{A}^2) + O(\mathbf{B}^2)$

$= 1 + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{AB} + O(\mathbf{A}^2) + O(\mathbf{B}^2)$.

2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Eigenwertgleichung: $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Säkulargleichung: $(1-\lambda)(-\lambda) - 6 = 0. \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$

$\rightarrow$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.

Zugehörige Eigenvektoren: $\lambda_1 = 3 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda_1)\,\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\lambda_1 = -2 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda_2)\,\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$

b) $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}\underbrace{\mathbf{Ax}}_{\lambda\mathbf{x}} = \lambda\underbrace{\mathbf{Ax}}_{\lambda\mathbf{x}} = \lambda^2\mathbf{x}.$

Daher hat $\mathbf{A}^2$ die gleichen Eigenvektoren wie $\mathbf{A}$, und die Eigenwerte werden einfach quadriert:

$\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^3\mathbf{x} = \mathbf{A}^2\underbrace{\mathbf{Ax}}_{\lambda\mathbf{x}} = \lambda\underbrace{\mathbf{A}^2\mathbf{x}}_{\lambda^2\mathbf{x}} = \lambda^3\mathbf{x}.$

Daher: $\lambda_1 = 27$, $\lambda_2 = -8$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

d) $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Von links mit $\lambda^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ multiplizieren liefert:

$\lambda^{-1}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}\mathbf{x} = \underbrace{\lambda^{-1}\mathbf{A}^{-1}\lambda}_{\mathbf{A}^{-1}}\mathbf{x}$, also: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x}$.

Daher sind die Eigenwerte gerade die Inversen:

$\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

e) $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \rightarrow \quad (\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + 3\mathbf{Ix} = (\lambda + 3)\,\mathbf{x}.$

Daher muss 3 zu den Eigenwerten addiert werden:

$\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2.3 Spektraltheorem

a) Säkulardeterminante: $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \det\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ führt zu $(3-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) - 4(2-\lambda) - 4(4-\lambda) = 0. \quad \to \quad -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda + 0 = 0.$
$\to \quad \lambda\left(\lambda^2 - 9\lambda + 18\right) = 0.$

Eigenwerte: $\lambda_3 = 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = \frac{9\pm3}{2} \quad \to \quad \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 3.$

Zugehörige Eigenvektoren: für $\lambda_3 = 0$:

$(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\,\mathbf{x}_3 = 0 \quad \to \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}_3 = 0 \quad \to \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$. Lösen des Gleichungssystems mit 3 Variablen liefert (nach einiger Rechnung) z.B. $x_1 - x_3 = 0$, $2x_2 + x_3 = 0$, was z.B. durch den Vektor $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllt wird.

Analog findet man für $\lambda_1 = 6$:

$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\,\mathbf{x}_1 = 0 \quad \to \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}_1 = 0 \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{x}_1 = 0, \text{also } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Und für $\lambda_2 = 3$ folgt $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Normierte Eigenvektoren: $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Projektoren:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_1^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}(2,2,-1) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_2^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}(-1,2,2) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_3^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}(2,-1,2) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Spektrale Form:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{E}_i = 6 \times \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \times \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} + 0 \times \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$