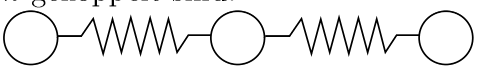
3. Tutorium **für 4.11.2011**

3.1 Gekoppelte Massen

Gegeben seien drei Objekte mit Masse m, die über Federn mit Federkonstante k gekoppelt sind:



$\mathbf{x}_1$ $\mathbf{x}_2$ $\mathbf{x}_3$

*) Wie schwingt das System, wenn man die erste Masse auslenkt? Was ist die intuitive Erwartung bevor es mit der Rechnung losgeht?

a) Die Koordinaten seien so gewählt, dass in Ruhelage der Federn $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ gilt. Somit lässt sich schreiben:

$F_1 = m\ddot{x}_1 = k\,(x_2 - x_1)$, $F_2 = m\ddot{x}_2 = -k\,(x_2 - x_1) + k\,(x_3 - x_2)\,$, etc.

In Matrixform lässt sich das schreiben als:

$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}\mathbf{x}$. Wie lautet die Matrix $\mathbf{M}$?

b) Eine Lösung lautet: $\mathbf{x} = e^{i\mathbf{\Omega}t}\mathbf{x}_0$ mit $\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{M}$ und den Startwerten $\mathbf{x}_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Zeige durch Einsetzen, dass das obige Differenzialgleichung löst (unter der Annahme, dass man die Wurzel $\mathbf{\Omega} = \sqrt{\mathbf{M}}$ ziehen kann, d.h. eine Matrix $\mathbf{\Omega}$ finden kann, für die $\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{M}$ gilt).

c) Anstatt direkt mit der Matrix $\mathbf{M}$ zu rechnen (Wurzel ziehen, Potenzieren, ...), ist es einfacher, in eine Basis zu wechseln, in der $\mathbf{M}_D$ diagonal ist. Zeige: Wenn man eine Transformation $\mathbf{S}$ findet, für die $\mathbf{M}_D = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{S}$ gilt, so lässt sich schreiben:

$\ddot{\mathbf{x}}_D = -\mathbf{M}_D\mathbf{x}_D$,

$\mathbf{\Omega}_D^2 = \mathbf{M}_D$,

$\mathbf{x}_D = e^{i\mathbf{\Omega}_D t}\mathbf{x}_{D,0}$.

Wie lauten $\mathbf{x}_D$ und $\mathbf{\Omega}_D$ (ausgedrückt durch $\mathbf{x}$, $\mathbf{\Omega}$, und $\mathbf{S}$)?

d) Berechne $\mathbf{M}_D$ und $\mathbf{S}$. (Hinweis: $\mathbf{M}_D$ ist die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von $\mathbf{M}$ entlang der Diagonalen, und $\mathbf{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ist die Matrix bestehend aus den zugehörigen Eigenvektoren).

e) Berechne $\mathbf{S}^{-1}$ und $\mathbf{x}_{D,0} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}_0$ für gegebenes $\mathbf{x}_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})^T$.

*) Wer will, kann überprüfen, dass tatsächlich $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{E}$, $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{S} = \mathbf{M}_D$ und $\mathbf{S}\mathbf{M}_D\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{M}$.

f) Finde alle Diagonalmatrizen $\mathbf{\Omega}_D$ für die $\mathbf{\Omega}_D^2 = \mathbf{M}_D$.

g) Schreibe $\mathbf{x}_D(t)$ für $\mathbf{\Omega}_D$ mit positiven Eigenwerten. Wie schaut die Lösung aus, falls nur $x_{1,0}$ ausgelenkt wird, d.h. $x_{2,0} = x_{3,0} = 0$? Transformiere diese Lösung in das ursprüngliche System zurück um $\mathbf{x}(t)$ zu erhalten. Wie lautet $x_1(t)$?

3.2 Kochen-Specker-Theorem

Gegeben sei ein Greechie-Diagramm für folgende Kontexte:
$a = \{A, B, C\}$, $b = \{C, D, E\}$, $c = \{E, F, G\}$, $d = \{G, H, I\}$, $e = \{I, J, A\}$, mit den Vektoren $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $D = (1, 1, 0)$, $G = (1, 1, 1)$.
a) Zeichne das Greechie-Diagramm und bestimme E, F, H, I, und J der orthogonalen Basen.
b) Gib einen konsistenten internen Zustand für dieses System an (Für einen konsistenten internen Zustand wird jedem Vektor A bis J ein eindeutiges Messergebnis 0 oder 1 zugeordnet, mit der Bedingung, dass in jedem Kontext ein eindeutiges Messergebnis gemessen wird, d.h. in jedem Kontext genau ein 1er vorkommt).
c) Alice misst im Kontext a, Bob misst im Kontext b. Würden deren Ergebnisse zusammenpassen?
d) Zähle für den internen Zustand aus b) die Zahl der 1er auf den Ecken (z_E) und die Zahl der 1er auf den Kantenmitten (z_K). Berechne die Summe $2z_E + z_K$.
e) Finde 2 weitere konsistente interne Zustände mit anderen z_E. Berechne jeweils $2z_E + z_K$. Was fällt am Ergebnis auf, und wie kann man das erklären? (Hinweis: Wie lautet die Summe der Messergebnisse für $a = \{A, B, C\}$? Wie für b? Wie für $a + b + c + d + e$?)
f) In der Basiswahl von Cabello kann man keinen konsistenten internen Zustand finden (= Beweis des Kochen-Specker-Theorems in vier Dimensionen). Wenn man hingegen weniger als 9 Kontexte verwendet, findet man sehr wohl einen konsistenten internen Zustand. Gib einen konsistenten internen Zustand für 8 Kontexte (a bis h verwenden, und i weglassen) an. Zähle die Zahl der 1er an allen Punkten, durch die 2 Linien gehen (z_{2L}) und die Zahl der 1er an allen Punkten, durch die 1 Linie geht (z_{1L}), und bilde $2z_{2L} + z_{1L}$. Stimmt das Ergebnis mit der Erwartung überein?
g) Füge den 9. Kontext i von Cabello hinzu. Wie groß ist z_{1L} nun? Wie lautet das Ergebnis für $2z_{2L} + z_{1L}$ und wo ist der Widerspruch?
h) Alice und Bob (und 7 weitere Freunde) messen weiterhin eindeutige Ergebnisse in ihrem jeweiligen Kontext. Können sie ihre Ergebnisse mit einem vorbestimmten internen Zustand erklären? Könnte jemand schon *vor* der Messung sagen, welches Ergebnis herauskommt, egal in welchem Kontext man misst?

Ankreuzbar: 1abc, 1de, 1fg, 2ab, 2cde, 2fgh