3. Tutorium - Lösungen **4.11.2011**

3.1 Gekoppelte Massen

a) Matrix: $\mathbf{M} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Aus der Taylorreihe der Exponentialfunktion $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ...$ formal auf Matrizen angewandt, folgt $\dot{\mathbf{x}} = i\mathbf{\Omega} e^{i\mathbf{\Omega}t}\mathbf{x}_0$. Nochmalige Ableitung liefert, da $\mathbf{\Omega}$ und $e^{i\mathbf{\Omega}t}$ vertauschen, $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{\Omega}^2 e^{i\mathbf{\Omega}t}\mathbf{x}_0$. Mit $\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{M}$ und $\mathbf{x} = e^{i\mathbf{\Omega}t}\mathbf{x}_0$ ist das genau $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}\mathbf{x}$.

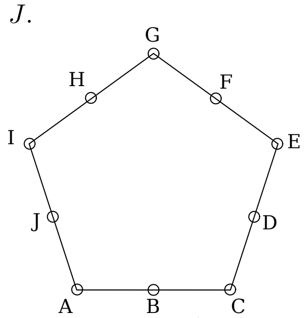
c) Multiplizieren von links mit $\mathbf{S}$ und von rechts mit $\mathbf{S}^{-1}$ ergibt aus $\mathbf{M}_D = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{S}$ $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{M}_D\mathbf{S}^{-1}$.
Einsetzen in $\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}\mathbf{x}$ liefert $\ddot{\mathbf{x}} = -\left[\mathbf{S}\mathbf{M}_D\mathbf{S}^{-1}\right]\mathbf{x}$.
Multiplizieren von links mit $\mathbf{S}^{-1}$ ergibt $\left[\mathbf{S}^{-1}\ddot{\mathbf{x}}\right] = -\mathbf{M}_D\left[\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}\right]$. Mit der Identifikation $\mathbf{x}_D = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$ (bzw. konsistent dazu $\ddot{\mathbf{x}}_D = \mathbf{S}^{-1}\ddot{\mathbf{x}}$) erhält man $\ddot{\mathbf{x}}_D = -\mathbf{M}_D\mathbf{x}_D$.
Mit $\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{M} = \left[\mathbf{S}\mathbf{M}_D\mathbf{S}^{-1}\right]$ folgt $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega}^2\mathbf{S} = \mathbf{M}_D$. Einfügen von $\mathbf{1} = \mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}$ liefert $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega}^2\mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}\mathbf{S} = \left[\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega}\mathbf{S}\right]\left[\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega}\mathbf{S}\right] = \mathbf{\Omega}_D\mathbf{\Omega}_D = \mathbf{\Omega}_D^2 = \mathbf{M}_D$, wobei $\mathbf{\Omega}_D = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Omega}\mathbf{S}$ gesetzt wurde.
Setzt man $\mathbf{\Omega} = \mathbf{S}\mathbf{\Omega}_D\mathbf{S}^{-1}$ und $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}_D$ in $\mathbf{x} = e^{i\mathbf{\Omega}t}\mathbf{x}_0$ ein erhält man:
$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}_D = e^{i\mathbf{\Omega}t}\mathbf{x}_0 = e^{i\left[\mathbf{S}\mathbf{\Omega}_D\mathbf{S}^{-1}\right]t}\mathbf{S}\mathbf{x}_{D,0} = \left\{1 + i\mathbf{S}\mathbf{\Omega}_D\mathbf{S}^{-1}t + \frac{i^2\mathbf{S}\mathbf{\Omega}_D\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{\Omega}_D\mathbf{S}^{-1}t^2}{2} + ...\right\}\mathbf{S}\mathbf{x}_{D,0}$
$= \mathbf{S}\left\{1 + i\mathbf{\Omega}_D t + \frac{i^2\mathbf{\Omega}_D\mathbf{\Omega}_D t^2}{2} + ...\right\}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{x}_{D,0} = \mathbf{S}e^{i\mathbf{\Omega}_D t}\mathbf{x}_{D,0}$. Multiplizieren von links mit $\mathbf{S}^{-1}$ liefert $\mathbf{x}_D = e^{i\mathbf{\Omega}_D t}\mathbf{x}_{D,0}$.

d) Berechnung der Eigenwerte: $\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$.
Berechnung für $k/m = 1$ und später alle Eigenwerte mit k/m multiplizieren:
$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$.
$(1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$. Gemeinsamen Faktor herausheben:
$(1-\lambda)\left[2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2\right] = 0. \quad \rightarrow \quad (1-\lambda)\lambda(-3+\lambda) = 0$. Daher Eigenwerte:
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Bzw. skaliert:
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{k}{m}$, $\lambda_3 = 3\frac{k}{m}$.
Zugehörige Eigenvektoren:
$\lambda_1 = 0$: $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{e}_1 = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{e}_1 = 0. \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\lambda_2 = 1$: $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{e}_2 = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{e}_1 = 0. \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$\lambda_3 = 3$: $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{e}_3 = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{e}_1 = 0. \quad \rightarrow \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Daher $\mathbf{M}_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
e) $\mathbf{S}^{-1}$ durch Invertieren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$
$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$
$$\mathbf{x}_{D,0} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_{1,0}+x_{2,0}+x_{3,0}) \\ \frac{1}{2}(x_{1,0}-x_{3,0}) \\ \frac{1}{6}(x_{1,0}-2x_{2,0}+x_{3,0}) \end{pmatrix}.$$
f) Diagonalmatrizen: $\mathbf{\Omega}_D = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix}$, also $\mathbf{\Omega}_D^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix} = \mathbf{M} = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Daher: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_3 = \pm\sqrt{3\frac{k}{m}}$.
Matrizen: $\mathbf{\Omega}_D^{(1)} = \sqrt{\frac{k}{m}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Omega}_D^{(2)} = \sqrt{\frac{k}{m}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Omega}_D^{(3)} = \sqrt{\frac{k}{m}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$,
$\mathbf{\Omega}_D^{(4)} = \sqrt{\frac{k}{m}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
g) $\mathbf{x}_D(t) = e^{i\mathbf{\Omega}_D t}\mathbf{x}_{D,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\sqrt{3\frac{k}{m}}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_{1,0}+x_{2,0}+x_{3,0}) \\ \frac{1}{2}(x_{1,0}-x_{3,0}) \\ \frac{1}{6}(x_{1,0}-2x_{2,0}+x_{3,0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_{1,0}+x_{2,0}+x_{3,0}) \\ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\frac{1}{2}(x_{1,0}-x_{3,0}) \\ e^{i\sqrt{3\frac{k}{m}}t}\frac{1}{6}(x_{1,0}-2x_{2,0}+x_{3,0}) \end{pmatrix}$.
Für $x_{2,0} = x_{3,0} = 0$ gilt $\mathbf{x}_D(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\frac{1}{2} \\ e^{i\sqrt{3\frac{k}{m}}t}\frac{1}{6} \end{pmatrix} x_{1,0}$.
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}\mathbf{x}_D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\frac{1}{2} \\ e^{i\sqrt{3\frac{k}{m}}t}\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\frac{1}{2} + e^{i\sqrt{3\frac{k}{m}}t}\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} - 2e^{i\sqrt{3\frac{k}{m}}t}\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} - e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\frac{1}{2} + e^{i\sqrt{3\frac{k}{m}}t}\frac{1}{6} \end{pmatrix} x_{1,0}.$$
Also, $x_1(t) = \left(\frac{1}{3} + e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\frac{1}{2} + e^{i\sqrt{3\frac{k}{m}}t}\frac{1}{6}\right) x_{1,0}$.
Anmerkung: Den Imaginärteil verschwindet, indem man positive und negative Frequenzlösungen berücksichtigt: $\frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t} = \cos(\omega t)$.

3.2 Kochen-Specker-Theorem

a) Diagramm schaut aus wie ein Fünfeck mit den Ecken A, C, E, G, I und entlang der Kanten B, D, F, H, J.



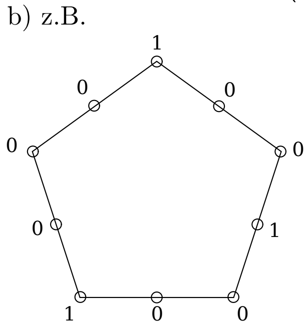
$$E = C \times D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (oder ein beliebiges Vielfaches davon).}$$

$F = G \times E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

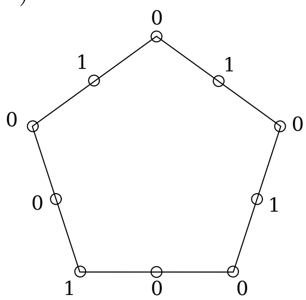
I muss sowohl orthogonal auf G als auch auf A sein: $I = G \times A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

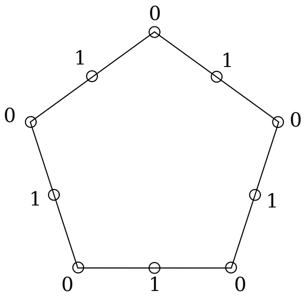
Weiters: $H = I \times G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $J = A \times I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) z.B.



c) Ja, Alice und Bob würden entlang von C immer das selbe Ergebnis feststellen, da C in beiden Kontexten enthalten ist, und ein konsistenter interner Zustand angegeben werden kann.
d) Für dieses Beispiel gilt: $z_E = 2$ und $z_K = 1$, daher $2z_E + z_K = 5$.
e)





Für das linke Diagramm gilt $z_E = 1$ und $z_K = 3$, also $2z_E + z_K = 5$.
Für das rechte Diagramm gilt $z_E = 0$ und $z_K = 5$, also $2z_E + z_K = 5$.
Das Ergebnis ist immer das selbe: $2z_E + z_K = 5$.
Das erklärt man so: das Messergebnis ist stets $\nu(a) = \nu(A + B + C) = \nu(A) + \nu(B) + \nu(C) = 1$, da entweder $\nu(A) = 1$, $\nu(B) = 0$, $\nu(C) = 0$, oder eine der anderen beiden Möglichkeiten gegeben ist. Ebenso ist $\nu(b) = \nu(C) + \nu(D) + \nu(E) = 1$.
Daher gilt $\nu(a) + \nu(b) + \nu(c) + \nu(d) + \nu(e) = 5$ (also die Zahl der Kontexte).
Folglich $\nu(a) + \nu(b) + \nu(c) + \nu(d) + \nu(e) =$

$$= [\nu(A) + \nu(B) + \nu(C)] + [\nu(C) + \nu(D) + \nu(E)] + [\nu(E) + \nu(F) + \nu(G)]$$
$$+ [\nu(G) + \nu(H) + \nu(I)] + [\nu(I) + \nu(J) + \nu(A)]$$
$$= 2\,[\nu(A) + \nu(C) + \nu(E) + \nu(G) + \nu(I)] + [\nu(B) + \nu(D) + \nu(F) + \nu(H) + \nu(J)]$$
$$= 2\,[z_E] + [z_K] = 5.$$

f) z.B. $A = E = H = M = 1$, Rest 0. $z_{2L} = 4$, $z_{1L} = 0$, und somit $2z_{2L} + z_{1L} = 8$ entspricht genau der Zahl der Kontexte.
g) Da es keinen einzigen Punkt gibt, durch den nur eine Linie geht (durch alle Punkte gehen genau 2 Linien), ist $z_{1L} = 0$. Insgesamt muss sich aber die Zahl der Kontexte ergeben: $2z_{2L} + z_{1L} = 2z_{2L} = 9$. Da z_{2L} eine natürliche Zahl sein sollte (man will es ja abzählen), ist $2z_{2L}$ eine gerade Zahl, soll aber eine ungerade Zahl (nämlich 9) sein. Das kann nicht erfüllt werden, und führt daher zu einem Widerspruch.
h) Nein. Die Quantenmechanische Messung führt zwar bei jeder einzelnen Messung zu einem eindeutigen Ergebnis. Leider kann man dieses Ergebnis aber nicht unter der Annahme erklären, dass das Ergebnis schon vor der Messung feststehen würde, egal in welcher Basis man misst.