4. Tutorium - Lösungen **11.11.2011**

4.1 Funktionen von Matrizen

a) $\det\left(A^{-1}BA\right) = \det\left(A^{-1}B\right)\cdot\det A = \det A\cdot\det\left(A^{-1}B\right) = \det\left(\underbrace{AA^{-1}}_{I}B\right) = \det B.$

b) $\mathrm{Tr}\left(A^{-1}BA\right) = \mathrm{Tr}\left(\underbrace{AA^{-1}}_{I}B\right) = \mathrm{Tr}B.$

c) $e^{A^{-1}BA} = I + A^{-1}BA + \frac{1}{2}\left(A^{-1}BA\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(A^{-1}BA\right)^3 + \dots$
$= \underbrace{I}_{A^{-1}A=A^{-1}IA} + A^{-1}BA + \frac{1}{2}A^{-1}B\underbrace{AA^{-1}}_{I}BA + \frac{1}{3!}A^{-1}B\underbrace{AA^{-1}}_{I}B\underbrace{AA^{-1}}_{I}BA + \dots$
$= A^{-1}\left(I + B + \frac{1}{2}BB + \frac{1}{3!}BBB + \dots\right)A$
$= A^{-1}e^{B}A.$

d) $\det\left(e^{A}\right) = \det\left(e^{S^{-1}A_DS}\right) = \det\left(S^{-1}e^{A_D}S\right) = \det\left(S^{-1}\right)\det\left(e^{A_D}\right)\det\left(S\right) = \det\left(e^{A_D}\right)$. Per Konstruktion sind nur Diagonalelemente von A_D besetzt:

$$A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\right).$$

$$e^{A_D} = 1 + A_D + \frac{1}{2}A_D^2 + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 + \dots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2 + \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2}\lambda_n^2 + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow \det\left(e^{A_D}\right) = \det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}.$$

Das stimmt mit der rechten Seite überein: $e^{\mathrm{Tr}A} = e^{\mathrm{Tr}\left(S^{-1}A_DS\right)} = e^{\mathrm{Tr}A_D} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$.

e) Man könnte analog wie oben die Reihendarstellung verwenden:
$\ln\left(1+x\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$ (für $-1 < x < 1$), indem man für x die Matrix $x = B - 1$ einsetzt. (Reihe konvergiert nur, wenn alle Eigenwerte von $B - 1$ vom Betrag kleiner 1 sind).

Einfacher macht man es sich, indem man $e^{A} = B$ setzt, und die Umkehroperation $B = \ln A$ nennt (durch Einsetzten der Reihendarstellungen ineinander sieht man, dass das tatsächlich konsistent ist). Dann folgt:
$\det\left(e^{A}\right) = e^{\mathrm{Tr}A} \;\rightarrow\; \det\left(B\right) = e^{\mathrm{Tr}\left(\ln B\right)} \stackrel{\ln}{\rightarrow} \ln\left(\det B\right) = \mathrm{Tr}\left(\ln B\right)$

4.2 Tensoren

a) Transformationsmatrix $\mathbf{e}'_i = a_i{}^j\mathbf{e}_j$: $a_1{}^1 = \cos\varphi$, $a_1{}^2 = \sin\varphi$, $a_2{}^1 = -\sin\varphi$, $a_2{}^2 = \cos\varphi$. (Notation: $c \equiv \cos\varphi$, $s \equiv \sin\varphi$)
$A'_{jk} = a_j{}^l a_k{}^m A_{lm}$.

$A'_{11} = a_1{}^l a_1{}^m A_{lm} = a_1{}^1 a_1{}^1 A_{11} + a_1{}^1 a_1{}^2 A_{12} + a_1{}^2 a_1{}^1 A_{21} + a_1{}^2 a_1{}^2 A_{22} = c^2 1 + cs2 + sc3 + ss4 = c^2 + 5sc + 4s^2.$
$A'_{12} = a_1{}^l a_2{}^m A_{lm} = a_1{}^1 a_2{}^1 A_{11} + a_1{}^1 a_2{}^2 A_{12} + a_1{}^2 a_2{}^1 A_{21} + a_1{}^2 a_2{}^2 A_{22} = -cs1 + c^2 2 - s^2 3 + sc4 = 2c^2 + 3sc - 3s^2.$
$A'_{21} = a_2{}^l a_1{}^m A_{lm} = a_2{}^1 a_1{}^1 A_{11} + a_2{}^1 a_1{}^2 A_{12} + a_2{}^2 a_1{}^1 A_{21} + a_2{}^2 a_1{}^2 A_{22} = -sc1 - s^2 2 + c^2 3 + cs4 = 3c^2 + 3sc - 2s^2.$
$A'_{22} = a_2{}^l a_2{}^m A_{lm} = a_2{}^1 a_2{}^1 A_{11} + a_2{}^1 a_2{}^2 A_{12} + a_2{}^2 a_2{}^1 A_{21} + a_2{}^2 a_2{}^2 A_{22} = +s^2 1 - sc2 - cs3 + c^2 4 = 4c^2 - 5sc + s^2.$
In Matrizenform geschrieben: $a_i{}^j \to a = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
$A'_{jk} = a_j{}^l a_k{}^m A_{lm} \to A' = aAa^T = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c+2s & -s+2c \\ 3c+4s & -3s+4c \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} c^2+5sc+4s^2 & 2c^2+3sc-3s^2 \\ 3c^2+3sc-2s^2 & 4c^2-5sc+s^2 \end{pmatrix}.$
b) Metrischer Tensor: $g'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j$.
$g'_{11} = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$
$g'_{12} = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} = -cs + sc = 0.$
$g'_{21} = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = -cs + sc = 0.$
$g'_{22} = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$
$g'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
$g'^{ij} g'_{jk} = \delta_k{}^i \to g'^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
c) $A'^{11} = g'^{1k} g'^{1l} A'_{kl} = g'^{11} g'^{11} A'_{11} + g'^{11} g'^{12} A'_{12} + g'^{12} g'^{11} A'_{21} + g'^{12} g'^{12} A'_{22} = A'_{11} = c^2 + 5sc + 4s^2.$
Und ähnlich: $A'^{12} = A'_{12} = 2c^2 + 3sc - 3s^2$, $A'^{21} = A'_{21} = 3c^2 + 3sc - 2s^2$, $A'^{22} = A'_{22} = 4c^2 - 5sc + s^2$.
d) Transformationsmatrix $\mathbf{e}''_i = a_i{}^j \mathbf{e}_j$: $a_1{}^1 = 1$, $a_1{}^2 = 0$, $a_2{}^1 = 1$, $a_2{}^2 = 1$.
$A''_{jk} = a_j{}^l a_k{}^m A_{lm}.$
$A''_{11} = a_1{}^l a_1{}^m A_{lm} = a_1{}^1 a_1{}^1 A_{11} + a_1{}^1 a_1{}^2 A_{12} + a_1{}^2 a_1{}^1 A_{21} + a_1{}^2 a_1{}^2 A_{22} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1.$
$A''_{12} = a_1{}^l a_2{}^m A_{lm} = a_1{}^1 a_2{}^1 A_{11} + a_1{}^1 a_2{}^2 A_{12} + a_1{}^2 a_2{}^1 A_{21} + a_1{}^2 a_2{}^2 A_{22} = 1 + 2 + 0 + 0 = 3.$
$A''_{21} = a_2{}^l a_1{}^m A_{lm} = a_2{}^1 a_1{}^1 A_{11} + a_2{}^1 a_1{}^2 A_{12} + a_2{}^2 a_1{}^1 A_{21} + a_2{}^2 a_1{}^2 A_{22} = 1 + 0 + 3 + 0 = 4.$
$A''_{22} = a_2{}^l a_2{}^m A_{lm} = a_2{}^1 a_2{}^1 A_{11} + a_2{}^1 a_2{}^2 A_{12} + a_2{}^2 a_2{}^1 A_{21} + a_2{}^2 a_2{}^2 A_{22} = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$
e) $g_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j$.
$g''_{11} = \mathbf{e}''_1 \cdot \mathbf{e}''_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$
$g''_{12} = \mathbf{e}''_1 \cdot \mathbf{e}''_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$
$g''_{21} = \mathbf{e}''_2 \cdot \mathbf{e}''_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$
$g''_{22} = \mathbf{e}''_2 \cdot \mathbf{e}''_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$
$g''^{ij} g''_{jk} = \delta^i_k \to$Inverse bilden:
$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$
$g''^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$
$A''^{11} = g''^{1k} g''^{1l} A''_{kl} = g''^{11} g''^{11} A''_{11} + g''^{11} g''^{12} A''_{12} + g''^{12} g''^{11} A''_{21} + g''^{12} g''^{12} A''_{22}$
$= 4 \times 1 - 2 \times 3 - 2 \times 4 + 1 \times 10 = 4 - 6 - 8 + 10 = 0,$
$A''^{12} = g''^{1k} g''^{2l} A''_{kl} = -2 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 4 - 1 \times 10 = -2 + 6 + 4 - 10 = -2,$
$A''^{21} = g''^{2k} g''^{1l} A''_{kl} = -2 \times 1 + 1 \times 3 + 2 \times 4 - 1 \times 10 = -2 + 3 + 8 - 10 = -1,$
$A''^{22} = g''^{2k} g''^{2l} A''_{kl} = +1 \times 1 - 1 \times 3 - 1 \times 4 + 1 \times 10 = 1 - 3 - 4 + 10 = 4.$
*) Überprüfung:
z.B.. $A^{ij} A_{ji} = A^{11} A_{11} + A^{12} A_{21} + A^{21} A_{12} + A^{22} A_{22} = 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 4 = 29.$
$A^{ij} A_{ij} = A^{11} A_{11} + A^{12} A_{12} + A^{21} A_{21} + A^{22} A_{22} = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 30.$

etc.

4.3 Levi-Civita Symbol

a) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$
Einsetzen: falls i, j, k und k, l, m jeweils paarweise verschieden sind: In der Summe über k trägt links nur 1 Term bei.
Falls i, j, und k eine gerade Permutation von l, m, k ist ergibt sich $+1$, z.B.:
$i = 1$, $j = 2$, $l = 1$, $m = 2$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 1 \cdot 1 = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 1 - 0 = 1$.
Falls i, j, und k eine ungerade Permutation von l, m, k ist ergibt sich -1, z.B.:
$i = 1$, $j = 2$, $l = 2$, $m = 1$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 1 \cdot (-1) = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0 - 1 = -1$.
(Zyklisches Vertauschen ändert weder links noch rechts etwas am Ergebnis).
Falls i und j ident sind, ergibt sich links 0 und rechts
$\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 0$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention).

b) $a_i^{\ j} \to a = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varepsilon'_{ijk} = a_i^{\ l} a_j^{\ m} a_k^{\ n} \varepsilon_{lmn}$:

$\varepsilon'_{123} = a_1^{\ l} a_2^{\ m} a_3^{\ n} \varepsilon_{lmn} = a_1^{\ 1} a_2^{\ 2} a_3^{\ 3} \epsilon_{123} - a_1^{\ 2} a_2^{\ 1} a_3^{\ 3} \epsilon_{213} + a_1^{\ 2} a_2^{\ 3} a_3^{\ 1} \epsilon_{231} - a_1^{\ 3} a_2^{\ 2} a_3^{\ 1} \epsilon_{321} + a_1^{\ 3} a_2^{\ 1} a_3^{\ 2} \epsilon_{312} - a_1^{\ 3} a_2^{\ 2} a_3^{\ 1} \epsilon_{321}$
$= \cos\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\sin\varphi + 0 - 0 + 0 - 0 = 1$.

$\varepsilon'_{213} = a_2^{\ l} a_1^{\ m} a_3^{\ n} \varepsilon_{lmn} = a_2^{\ 1} a_1^{\ 2} a_3^{\ 3} \epsilon_{123} - a_2^{\ 2} a_1^{\ 1} a_3^{\ 3} \epsilon_{213} + a_2^{\ 2} a_1^{\ 3} a_3^{\ 1} \epsilon_{231} - a_2^{\ 3} a_1^{\ 2} a_3^{\ 1} \epsilon_{321} + a_2^{\ 3} a_1^{\ 1} a_3^{\ 2} \epsilon_{312} - a_2^{\ 3} a_1^{\ 2} a_3^{\ 1} \epsilon_{321}$
$= -\sin\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\cos\varphi + 0 - 0 + 0 - 0 = -1$.

etc.