6. Tutorium - Lösungen **25.11.2011**

6.1 Gaußsches Integral

a) Jacobi-Matrix:
$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}\Big|_\varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\Big|_r \\ \frac{\partial y}{\partial r}\Big|_\varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\Big|_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned}
dx\,dy &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| dr\,d\varphi \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}\Big|_\varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\Big|_r \\ \frac{\partial y}{\partial r}\Big|_\varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\Big|_r \end{vmatrix} dr\,d\varphi \\
&= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} dr\,d\varphi \\
&= \left(r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi\right) dr\,d\varphi \\
&= r\,dr\,d\varphi,
\end{aligned}$$

Jacobi-Determinante:
$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| = \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$
b) Gaußsches Integral:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\,re^{-r^2} \\
&= 2\pi\int_0^{\infty}\frac{ds}{2r}re^{-s} = \pi\int_0^{\infty} dse^{-s} = \\
&= \pi\left(-e^{-\infty}+e^{-0}\right) = \pi\,(0+1) = \pi
\end{aligned}$$

wobei die Transformation des Flächenelements über die Jacobi-Determinante $dx\,d\varphi = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| dr\,d\varphi = r\,dr\,d\varphi$ und die Substitution $r^2 = s$, $2r\,dr = ds$ verwendet wurden.

6.2 Residuensatz

a) Lösungen von $x^n + 1 = 0$, also $x^n = -1$: Satz von de Moivre: $e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$. Rechte Seite ergibt -1 für $n\varphi = \pi(2N+1)$ mit ganzzahligem N. Daher $\varphi = \frac{\pi}{n}(2N+1)$ mit $N = 0, 1, \ldots, n-1$.
Für $x = 4$ hat man $x_1 = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $x_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $x_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $x_4 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.
b) Da $h(x)$ eine einfache Nullstelle bei $x = c$ hat, gilt $h(x) \approx (x-c)h'(c)$ in einer Umgebung von $x = c$. Daher:
$\mathrm{Res}_{x\to c}f(x) = \mathrm{Res}_{x\to c}f(x) = \mathrm{Res}_{x\to c}\frac{g(x)}{h(x)} \approx \mathrm{Res}_{x\to c}\frac{g(x)}{(x-c)h'(c)} = \lim_{x\to c}(x-c)\,\frac{g(x)}{(x-c)h'(c)}$
$= \lim_{x\to c}\frac{g(x)}{h'(c)} = \frac{g(c)}{h'(c)}$.

Wem das „≈“ zu ungenau ist, der kann $h(x)$ auch in einer Taylor-Reihe $h(x) = 0+(x-c)\,h'(c)+\frac{1}{2!}\,(x-c)^2\,h''(c)+\ldots$ expandieren und dann die Laurentreihe des Quotienten bilden. Der Koeffizient $a_{-1} = g(c)/h'(c)$ der Laurentreihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ist dann genau das gesuchte Residuum.

c) Die Pole befinden sich bei $e^{\pm i\pi/4}$ und $e^{\pm 3i\pi/4}$. Man kann die oberen zwei Pole wählen, und den Integrationsweg über den oberen Halbkreis schließen, der keinen Beitrag liefert. Die Residuen an den Polen der oberen Halbebene sind

$\mathrm{Res}_{x\to e^{i\pi/4}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1} = \left.\frac{x^2+ax+b}{4x^3}\right|_{x=e^{i\pi/4}} = \frac{i+ae^{i\pi/4}+b}{4e^{3i\pi/4}}.$

$\mathrm{Res}_{x\to e^{3i\pi/4}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1} = \left.\frac{x^2+ax+b}{4x^3}\right|_{x=e^{3i\pi/4}} = \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4e^{9i\pi/4}} = \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4e^{i\pi/4}}.$

Schließen im oberen Halbkreis (positiver Umlaufsinn, daher kein zusätzliches „-“) ergibt:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+bx+c}{x^4+1}dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{x\to e^{i\pi/4}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1} + \mathrm{Res}_{x\to e^{3i\pi/4}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1}\right)$

$= 2\pi i\left(\frac{i+ae^{i\pi/4}+b}{4}e^{-3i\pi/4} + \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4}e^{-i\pi/4}\right)$

$= \frac{\pi i}{2}\left[i\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + a\,(-i+i) + b\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,(1+b).$

6.3 Testfunktionen

a) $F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax+b)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\varphi(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a}dy = \frac{1}{a}\varphi(-\frac{b}{a}).$

Variablensubstitution $ax+b=y$, $a\,dx = dy$, $dx = \frac{1}{a}dy$. Integrationsgrenzen bleiben für $a>0$ gleich: $-\infty$ bis $+\infty$.

Testfunktion φ: Im Allgemeinen muss eine Testfunktion einen kompakten Träger haben (daher insbesondere im Unendlichen verschwinden) und beliebig oft differenzierbar sein.

b) Für $a<0$ ändern sich Integrationsgrenzen:

$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax+b)\varphi(x)dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(y)\varphi(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a}dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)\varphi(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a}dy = -\frac{1}{a}\varphi(-\frac{b}{a}).$

6.4 Parabolische Koordinaten

a) $g'_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x_l}{\partial x'^j}$. Mit $x'^1 = x$, $x'^2 = u$, und $x'^3 = v$ ergibt sich

$g'_{11} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^1}\frac{\partial x_l}{\partial x'^1} = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial x}\frac{\partial(uv)}{\partial x} = 1+0+0 = 1.$

$g'_{22} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^2}\frac{\partial x_l}{\partial x'^2} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial u}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial u} + \frac{\partial(uv)}{\partial u}\frac{\partial(uv)}{\partial u} = 0+u^2+v^2 = u^2+v^2.$

$g'_{33} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^3}\frac{\partial x_l}{\partial x'^3} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial v}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial v} + \frac{\partial(uv)}{\partial v}\frac{\partial(uv)}{\partial v} = 0+v^2+u^2 = u^2+v^2.$

Nicht-diagonale Elemente:

Da der metrische Tensor symmetrisch ist, $g'_{ij} = g'_{ji}$, erhält man:

$g'_{12} = g'_{21} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^1}\frac{\partial x_l}{\partial x'^2} = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial u} + \frac{\partial(uv)}{\partial x}\frac{\partial(uv)}{\partial u} = 0+0+0.$

$g'_{13} = g'_{31} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^1}\frac{\partial x_l}{\partial x'^3} = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial v} + \frac{\partial(uv)}{\partial x}\frac{\partial(uv)}{\partial v} = 0+0+0.$

$g'_{23} = g'_{32} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^2}\frac{\partial x_l}{\partial x'^3} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial u}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)\right)}{\partial v} + \frac{\partial(uv)}{\partial u}\frac{\partial(uv)}{\partial v} = 0-uv+vu = 0.$

$\to g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u^2+v^2 & 0 \\ 0 & 0 & u^2+v^2 \end{pmatrix}.$

Metrik diagonal → Basis orthogonal.

b) Einheitsvektoren:

$\tilde{\mathbf{e}}'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\mathbf{e}_j$, also

$\tilde{\mathbf{e}}'_x = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right) \\ uv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_x.$

$\tilde{\mathbf{e}}'_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right) \\ uv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix}.$

$\tilde{\mathbf{e}}'_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right) \\ uv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ u \end{pmatrix}.$

Normieren:
$\mathbf{e}'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{e}'_u = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ v \end{pmatrix}$.
$\mathbf{e}'_v = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ u \end{pmatrix}$.
c) Mit obiger Metrik: $U = 1$, $V = u^2 + v^2$, $W = u^2 + v^2$.
Gradient:

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \tfrac{1}{U}\mathbf{e}'^1\partial'_1\phi + \tfrac{1}{V}\mathbf{e}'^2\partial'_2\phi + \tfrac{1}{W}\mathbf{e}'^3\partial'_3\phi \\ &= \tfrac{1}{U}\mathbf{e}_x\partial_x\phi(x,u,v) + \tfrac{1}{V}\mathbf{e}_u\partial_u\phi(x,u,v) + \tfrac{1}{W}\mathbf{e}_v\partial_v\phi(x,u,v) \\ &= \mathbf{e}_x\partial_x\phi(x,u,v) + \tfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\mathbf{e}_u\partial_u\phi(x,u,v) + \tfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\mathbf{e}_v\partial_v\phi(x,u,v). \end{aligned}$$

Divergenz:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{a} &= \tfrac{1}{UVW}\left[\partial'_1\left(VWa'^1\right) + \partial'_2\left(UWa'^2\right) + \partial'_3\left(UVa'^3\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{UVW}\left[\partial_x\left(VWa_x\right) + \partial_u\left(UWa_u\right) + \partial_v\left(UVa_v\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{u^2+v^2}\left[\partial_x\left(\left(u^2+v^2\right)a_x\right) + \partial_u\left(\sqrt{u^2+v^2}a_u\right) + \partial_v\left(\sqrt{u^2+v^2}a_v\right)\right] \\ &= \partial_x a_x + \tfrac{1}{u^2+v^2}\partial_u\left(\sqrt{u^2+v^2}a_\theta\right) + \tfrac{1}{u^2+v^2}\partial_v\left(\sqrt{u^2+v^2}a_v\right). \end{aligned}$$