

**7. Tutorium**

für 2.12.2011

**7.1 Delta-Folgen**

Überprüfe durch Anwenden auf eine Testfunktion, welche der folgenden Folgen  $\{f_n\}$  Deltafolgen für  $n \rightarrow \infty$  bzw.  $\varepsilon \rightarrow 0$  sind:

a)

$$f_n(x) = \sqrt{n}e^{-n\pi x^2}.$$

b)

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } -\frac{\varepsilon^2}{2} < x < \frac{\varepsilon^2}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c)

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{|x|}{\varepsilon^2} & \text{für } -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**7.2 Distributionen**

Vereinfache bzw. berechne:

a)  $\delta(z^2 - 1)$ .

b)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y^2 + 2x - 24) \delta(x + y) f(x, y).$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - R) d^3x.$$

**7.3 Verallgemeinerten Funktionen**

a) Berechne die  $n$ -te Derivierte der verallgemeinerten Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi \leq x \leq \pi; \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

b) Vereinfache folgendes Funktional

$$\left(\frac{d}{dx} - \omega\right) [\theta(x)e^{\omega x} + \theta(-x)e^{-\omega x}].$$

## 7.4 Fourier Transformation

Berechne folgende Fourier-Transformierte für  $x \in \mathbb{R}$

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2 + 1} dk.$$

(Hinweis: Wo liegen die Pole des Integranden? Ist eine Integration entlang des Großkreises in der oberen oder in der unteren Halbebene harmlos? Das Ergebnis kann mit  $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$  und  $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  vereinfacht werden.)

## 7.5 Indexschreibweise

Vereinfache

a)  $\text{rot}(\mathbf{x} \times \mathbf{a})$ ,

b)  $\text{rot}(\mathbf{x}\theta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}))$ ,

wobei  $\mathbf{x}$  der Ortsvektor und  $\mathbf{a}$  konstant ist, und  $\theta$  die Heaviside-Funktion ist.

## 7.6 Maxwell-Gleichungen

a) Schreibe die Maxwellgleichungen und die Lorentzkraftdichte (in CGS Einheiten und mit  $c = 1$ ) in Indexschreibweise:

$$\text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E},$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B},$$

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

b) Berechne aus der dritten Gleichung die Divergenz des Stromes  $\mathbf{j}$  in Indexschreibweise und zeige, dass dies auf die Kontinuitätsgleichung führt.

c) Zeige in Indexschreibweise, dass  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$  und  $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$  zwei der Maxwellgleichungen lösen.

---

Ankreuzbar: 1abc, 2abc, 3ab, 4, 5ab, 6abc