

9. Tutorium**für 13.01.2012****9.1 Separationsansatz 1**

Separiere folgende Differentialgleichung, die den d'Alembertoperator (in 3+1 Dimensionen) enthält,

$$\square\Phi \equiv \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = \lambda\Phi$$

im kartesischen Koordinatensystem.

9.2 Separationsansatz 2

Transformiere den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten und führe den Separationsansatz für die homogene Laplace-Gleichung durch.

9.3 Fuchssche Klasse

a) Untersuche, ob folgende Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse angehört:

$$zw'' + 4w' + 2\frac{w}{z} = 0.$$

Wie lauten die charakteristischen Exponenten $\sigma_{1,2}$ an der Stelle $z = 0$? Wie an $z = \infty$?

b) Gib eine Lösungsbasis an.

c) Überprüfe die Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

9.4 Hypergeometrische Funktion

a) Zeige, dass für $|z| < 1$

$$F(1, \beta, \beta; z) = F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}; z\right) = \frac{1}{1-z}.$$

b) Zeige, dass für $0 < x < 1$

$$F\left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; x\right) = 3 \left[\frac{1}{2x^{3/2}} \log\left(\frac{1+x^{1/2}}{1-x^{1/2}}\right) - \frac{1}{x} \right].$$

Hinweis: $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}$ für $|x| < 1$.

9.5 Legendre-Polynome

Gib die (für die sphärische Multipolentwicklung verwendete) Entwicklung von

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

für $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$ mit Hilfe der Legendre-Polynome an, und berechne diese explizit bis $P_3(x)$.

Ankreuzbar: 1, 2, 3a, 3bc, 4ab, 5